

## Granica laminarnego przepływu wody w obsypce żwirowej studni eksploatacyjnej

Maciej Matyka<sup>1</sup>, Mariusz Mądrala<sup>2</sup>

The boundary of the laminar water flow in the filter pack of a pumping well. Prz. Geol., 65: 1334–1338.

*Abstract.* Structural changes of aquifers, resulting from a higher velocity of water entering a screen, may occur in the zone around wells' screen. Well discharge rate equations assume a laminar flow and agreement with the Darcy's law. Thus, the admissible velocity of water entering the screen should not exceed a certain limit. In this research, the microstructure of water flow velocity in the well's filter pack was studied. We took a picture of the internal structure of the aquifer's pore media in an in situ undisturbed soil sample. Because of the lack of a clear definition of the characteristic length scale in the Reynolds number, we propose to use additionally  $\pi$  – a dimensionless value describing the distribution of kinetic energy in the system – as a criterion for changing the flow nature. We based the study on numerical simulations of fluid flow in pore space. We used the Lattice-Boltzmann Method (LBM) to simulate water flow in the filtered zone. We find that in a real porous system of the filter pack with a porosity of  $n = 0.49$ , as opposed to highly porous material at  $n = 0.9$ , the values of  $\pi$  increase with the decreasing and increasing Reynolds number. The distribution of the velocity field in the analyzed sections also shows the formation of privileged water flow paths and the formation of vortex structures for high flow velocities.

**Keywords:** filter packs, water wells, pore-scale flow, the Lattice Boltzmann Method, participation number

W najbliższym otoczeniu eksploatowanej studni mogą zachodzić zmiany strukturalne skał będące wynikiem, większych od dopuszczalnych prędkości wlotowych wody ( $v_{dop}$ ), procesów sufozji i kolmatacji. Stosowane wzory na dopływ wody do studni zakładają ruch laminarny według prawa Darcy'ego, stąd  $v_{dop}$  nie powinna przekroczyć wartości, powyżej której ruch wody jest określany mianem turbulentnego. W celu zachowania ruchu laminarnego wody w większość odwiercanych studni stosuje się obsypki żwirowe (filtracyjne). W literaturze hydrogeologicznej można znaleźć 18 różnych wzorów obliczania  $v_{dop}$ , zależnie od przyjętego kryterium, którym może być dopuszczalny spadek hydrauliczny, własności fizyczne gruntu lub liczba Reynoldsa ( $Re$ ) dla przepływu cieczy w ośrodku porowatym (Dąbrowski, Mysiak, 1971). Graniczne wartości  $v_{dop}$ , dla określonego współczynnika filtracji  $k$ , mogą się różnić blisko stokrotnie, co budzi poważne zastrzeżenia dla praktycznego zastosowania wspomnianych wzorów jako wiarygodnego kryterium ruchu laminarnego.

Celem prezentowanych badań jest mikroskalowa charakterystyka przestrzeni porowej obsypki filtracyjnej studni w trakcie przepływu wody do studni. Prezentowane wyniki badań odnoszą się do rzeczywistej struktury analizowanego ośrodka granularnego w odróżnieniu od dotychczasowych badań bazujących na sztucznych modelach stworzonych z zastosowaniem szklanych kulek. Stwarza to możliwość uwzględnienia w badaniach modelowych zróżnicowania wielkości cząstek oraz stopnia i struktury wypełnienia przestrzeni porowej.

### KRYTERIA PRZEPŁYWU LAMINARNEGO W OŚRODKU POROWYM

Standardowym podejściem w badaniach przepływów cieczy w ośrodku porowatym jest zastosowanie prawa Darcy'ego, które zakłada liniową zależność średniej prędkości przepływu  $V$  i spadku (różnicy) ciśnienia  $\Delta P$ :

$$V = \frac{-k}{\mu} \times \frac{\Delta P}{L} \quad [1]$$

gdzie:

$k$  – przepuszczalność ośrodka;

$\mu$  – lepkość cieczy;

$L$  – długość drogi przepływu.

Prawo Darcy'ego jest powszechnie stosowane przy małych wartościach prędkości filtracji wody (Hellström, Lindström, 2006). Przy większych wartościach prędkości filtracji zaobserwowano znaczne odchylenie od zależności liniowej prawa Darcy'ego spowodowane wzrostem udziału siły bezwładności w przepływie, co wymaga zastosowania modeli nieliniowych do opisu procesu (Bear, Cheng, 2010). Jak wykazały badania eksperymentalne (Jones, 1987) i symulacje numeryczne (Andrade i in., 1999; Stanley, Andrade, 2001) stosowanie prawa Darcy'ego powinno być ograniczone do przepływów o niskich wartościach liczby  $Re$  wyrażonej równaniem:

$$Re = \frac{\rho V D_p}{\mu} \quad [2]$$

gdzie:

$\rho$  – gęstość cieczy;

$V$  – prędkość przepływu;

$D_p$  – średnica ziarna;

$\mu$  – lepkość cieczy.

<sup>1</sup> Wydział Fizyki i Astronomii, Uniwersytet Wrocławski, pl. Maksa Borna 9, 50-204 Wrocław; maciej.matyka@uwr.edu.pl.

<sup>2</sup> Instytut Nauk Geologicznych, Uniwersytet Wrocławski, pl. Maksa Borna 9, 50-204 Wrocław; mmad@ing.uni.wroc.pl.

Okolo 1901 r. Forchheimer zasugerował dodanie do równania Darcy'ego członu reprezentującego fizyczne efekty związane z przepływem nielaminarnym (Andrade i in., 1999).

$$\frac{-dP}{dL} = \frac{\mu}{k}V + \beta\rho V^2 \quad [3]$$

gdzie:

$\beta$  – współczynnik Forchheimera wyznaczany eksperymentalnie;

$\rho$  – gęstość cieczy.

W granularnych ośrodkach porowatych zmiana reżimu przepływu wody z liniowego (laminarnego) na nieliniowy (turbulentny) odbywa się prawdopodobnie stopniowo (Chai i in., 2010). Istnieją trzy rodzaje kryteriów umożliwiające identyfikację początku przepływu nieliniowego przez ośrodki porowate (Wang i in., 2013): typ 1 jest reprezentowany przez liczbę ( $Re$ ), a wartość graniczna zmienia się od 0,01 do 100; typ 2 wyraża liczba Forchheimera ( $Fo$ ) w zakresie od 0,005 do 0,2; natomiast typ 3 wyznacza zmodyfikowana liczba Reynoldsa (MRes), której wartości różnią się znacznie między sobą w zależności od zastosowanego wzoru. Ponieważ liczba Reynoldsa została zdefiniowana jako kryterium przepływu turbulentnego w przewodach rurowych o przekroju kołowym, wymiarem charakterystycznym zatem była średnica rury. Istotne trudności występują jednak przy określeniu wymiaru charakterystycznego przy przepływie przez nieregularne kanaliki połączeń międzyziarnowych ośrodka porowatego. Ponieważ przekrój porów zależy od uziarnienia ośrodka, przyjmuje się, że można go charakteryzować za pomocą średnicy ziaren, np. przez średnicę miarodajną  $d_n$ . Jednak z uwagi na znaczną anizotropowość struktury i tekstury ośrodków porowatych brak jest jednoznacznej definicji wymiaru charakterystycznego, co znacznie utrudnia stosowanie kryteriów 1- i 3- typu. Lepszym rozwiązaniem jest stosowanie liczby Forchheimera ( $Fo$ ) posiadającej sens fizyczny i precyzyjną definicję (Zeng, Grigga, 2006):

$$Fo = \frac{K\beta\rho V}{\mu} = \frac{\beta\rho V^2}{\mu V/K} \quad [4]$$

Równanie [4] opisuje spadek gradientu ciśnienia na skutek oddziaływania ciecz-faza stała  $\beta\rho V^2$  do spadku gradientu ciśnienia wskutek lepkości cieczy  $\mu V/K$ . Stosowanie liczby  $Fo$  wymaga jednak wyznaczenia współczynnika  $\beta$  oraz przepuszczalności  $K$ , z wykresu danych pomiarowych gradientu ciśnienia (Zeng, Grigga, 2006). Wykres wykazuje jednak odstępstwa od przebiegu liniowego, co wpływa na błąd wyznaczania liczby  $Fo$ . Powstaje zatem pytanie, które z kryteriów jest bardziej uniwersalne i pozwala na dokładniejsze wyznaczenie wartości granicznych wskazujących na początek przepływu nieliniowego?

Rozwiązaniem tego dylematu mogą być wyniki badań modelowych strumienia przepływu w ośrodku o bardzo wysokiej porowatości całkowitej ( $n_c = 0,9$ ) przy założonych dwóch wartościach liczby  $Re$  różniących się między sobą 1000-krotnie (Andrade i in., 1999). Wyniki modelowania przy niskiej wartości  $Re$  uwiaryściły powstawanie uprzywilejowanych dróg przepływu cieczy, co proponujemy określić jako „tunelowanie przepływu”. W warunkach wysokiej wartości  $Re$  drogi przepływu cieczy w całym

przekroju były bardziej jednorodne i homogeniczne. Andrade i in. (1999) na podstawie uzyskanych wyników zaproponowali do określenia punktu przejścia przepływu wody od liniowego, dla którego właściwe jest prawo Darcy'ego, do przepływu inercyjnego (turbulentnego), stosowanie bezwymiarowej liczby  $\pi$  zdefiniowanej jako:

$$\pi \equiv (n \sum_{i=1}^n q_i^2)^{-1} \left( \frac{1}{n} \leq \pi \leq 1 \right) \quad [5]$$

gdzie:

$n$  – liczba komórek aktywnych dla przepływu wody w numerycznej siatce przestrzeni porowej,

$q_i \equiv e_i / \sum_{j=1}^n e_j, e_i, e_j \alpha (u_i^2 + v_i^2)$  jest energią kinetyczną wody w każdej komórce;  $u_i$  i  $v_i$  – to składowe wektora prędkości w komórce i odpowiednio w kierunku  $x$  i  $y$ . Liczba  $\pi$  obrazuje zatem rozkład energii kinetycznej przepływającego płynu, który można przedstawić rozkładem pola prędkości przepływu w całym układzie. Zgodnie z definicją, wartość liczby  $\pi$  wynosiłaby 0 dla przepływu w nieskończenie dużym systemie o porowatości  $n = 1$ . Zatem w ośrodkach o niższej porowatości, na skutek występowania uprzywilejowanych dróg przepływu, skoncentrowana w nich energia kinetyczna przepływającej wody będzie zwiększać wartość liczby  $\pi$ .

Z uwagi na brak jednoznacznej definicji wymiaru charakterystycznego dla liczby  $Re$ , jako kryterium zmiany charakteru ruchu w obsypce stosujemy wartości bezwymiarowej liczby  $\pi$ . Zastosowanie liczby  $\pi$  zostało zweryfikowane dla obsypki filtracyjnej o znacznie mniejszej porowatości niż ośrodki granularne badane przez Andrade i in. (1999). W celu praktycznego wykorzystywania liczby  $\pi$ , przedstawiamy zależność jej wartości od wartości liczby  $Re$  w zakresie przepływu laminarnego wody zgodnego z prawem Darcy'ego.

## BADANIE STRUKTURY GEOMETRYCZNEJ OBSYPKI FILTRACYJNEJ

W badaniach mikroskalowych ośrodek porowaty traktuje się jako układ kanalików o konkretnej strukturze przestrzennej, co wymaga znajomości położenia i rozmiarów poszczególnych cząstek. W przypadku obsypki żwirowych uzyskanie takich danych jest możliwe na drodze eksperymentalnej. Obsypki są wykonywane z jednorodnego i sortowanego piasku lub żwiru, o znacznej kulistości i dobrym obtoczeniu ziaren, tworzących zazwyczaj jedną lub dwie warstwy. Ze względów hydraulicznych najkorzystniejsze parametry mają obsypki luźno wprowadzane do przestrzeni pierścieniowej studni, uzyskujące wysokie wartości porowatości (Gonet i in., 2011).

Jednym z istotnych problemów pojawiających się w badaniach dotyczących ośrodków granularnych jest kwestia analizy rozkładu średnic cząstek (ang. Particle Size Distribution, PSD), z których jest zbudowany ośrodek rzeczywisty o charakterze naturalnym. Najczęściej do tego celu wykorzystuje się rentgenowską tomografię komputerową (ang. X ray CT) (Hsieh i in., 1998; Haussener i in., 2012). W naszych badaniach do stworzenia modelu struktury wewnętrznej obsypki filtracyjnej wykorzystaliśmy zdjęcie preparatu mikroskopowego z próbki utworów wodonośnych w dolinie Warty (Skolasińska, 2000). Zdjęcie próbki zostało przekonwertowane na postać binarną (po konwersji pojedynczy bit oznacza

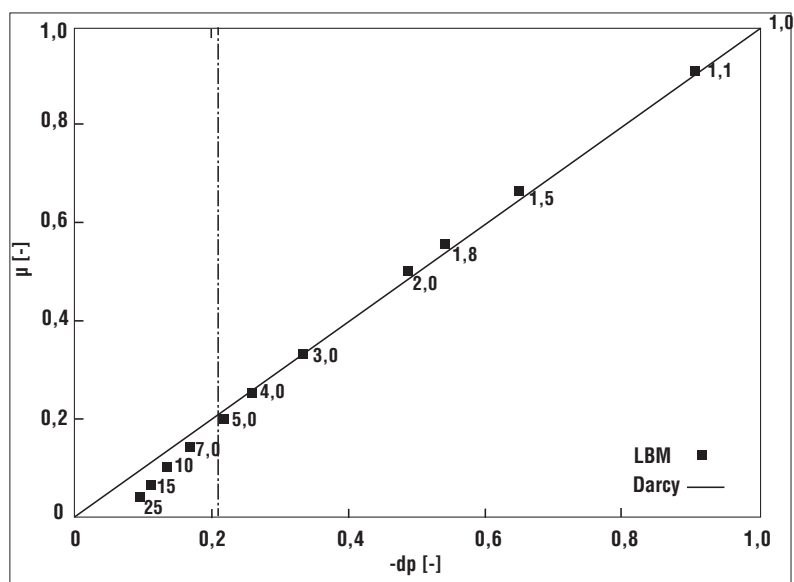
przestrzeń porową lub ziarna obsypki) z użyciem standardowych algorytmów w programach Octave ([www.gnu.org/software/octave](http://www.gnu.org/software/octave)). W procesie binaryzacji uzyskano również wartości porowatości całkowitej próbki wynoszącą  $n_c = 0,49$ . Następnie, w celu wyznaczenia wymiaru charakterystycznego, zmierzaliśmy szerokość kilkunastu ziaren, które wybraliśmy w sposób uporządkowany (idąc od lewej do prawej krawędzi w układzie). Uśrednioną wielkość ziaren użyto do zdefiniowania liczby  $Re$ .

### PRZEBIEG MODELOWANIA PRZEPŁYWU WODY W OŚRODKU POROWYM OBSYPKI FILTRACYJNEJ

Przepływ wody w przestrzeni porowej symulowany był metodą Gazu Sieciowego Boltzmanna (*Lattice Boltzmann Method*, LBM). Jest to metoda bazująca na teorii kinetycznej gazów, w której zamiast standardowych zmiennych hydrodynamiki używa się funkcji rozkładu prędkości znanej z fizyki statystycznej (Succi, 2001). Takie podejście pozwala znacznie uprościć opis skomplikowanych geometrii ośrodka porowatego, eliminując potrzebę generowania specjalnych siatek obliczeniowych. Badana próbka po binaryzacji została uzupełniona obszarami pozbawionymi cząstek stałych, stanowiących przeszkodę dla przepływu wody, po lewej i prawej stronie układu. Porowatość całkowitą tych obszarów przyjęto jako równą 1. Następnie wprowadzona jest ona w postaci siatki numerycznej o jednakowych elementach kwadratowych do oprogramowania z wykorzystaniem biblioteki Palabos ([www.palabos.org](http://www.palabos.org)). Na lewym brzegu modelu, symulującym wpływ wody do obsypki, zastosowaliśmy warunek Dirichleta dla prędkości (paraboliczny profil prędkości). Na prawym brzegu, symulującym wypływ, założyliśmy warunek Dirichleta dla ciśnienia z wartościami dobranymi empirycznie w celu uzyskania przepływu o ustalonej charakterystyce. Podobne warunki zostały użyte w pracy Bernsdorfa i in. (2000). Pozostałe boki domeny modelu (górną i dolną krawędź) zostały ograniczone warunkiem Dirichleta z zerową prędkością.

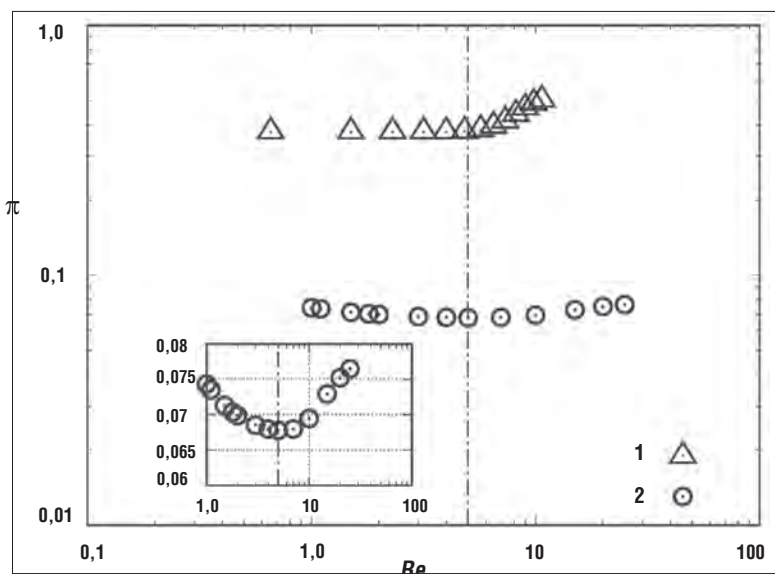
### DYSKUSJA WYNIKÓW

Pierwszym krokiem, jaki podjęto, było wyznaczenie granicy stosowalności prawa Darcy'ego w przepływie dla różnych liczb  $Re$ . Dla przepływu laminarnego (prawo Darcy'ego) zależność bezwymiarowej lepkości  $\mu$  od różnicy ciśnień  $dp$  ma charakter liniowy (ryc. 1). W celu wyznaczenia wartości krytycznej liczby  $Re$  dla ruchu laminarnego wykorzystaliśmy możliwość symulacji zmian lepkości wody modelem LBM. Rycina 1 przedstawia wyniki obliczeń bezwymiarowej lepkości



Ryc. 1. Zależność lepkości płynu od przyłożonego gradientu ciśnienia. Linia prostą zaznaczone zostało dopasowanie do relacji liniowej reprezentującej prawo Darcy'ego dla stałej prędkości  $\mu \sim (-dp)$ . Linia przerywana odpowiada wartości krytycznej  $Re = 5$  dla przepływu laminarnego

Fig. 1. The dependence of fluid viscosity on the applied pressure gradient. The straight line has been matched to the linear relation representing the Darcy law for constant velocity  $\mu \sim (-dp)$ . The dashed line corresponds to the critical value  $Re = 5$  for laminar flow

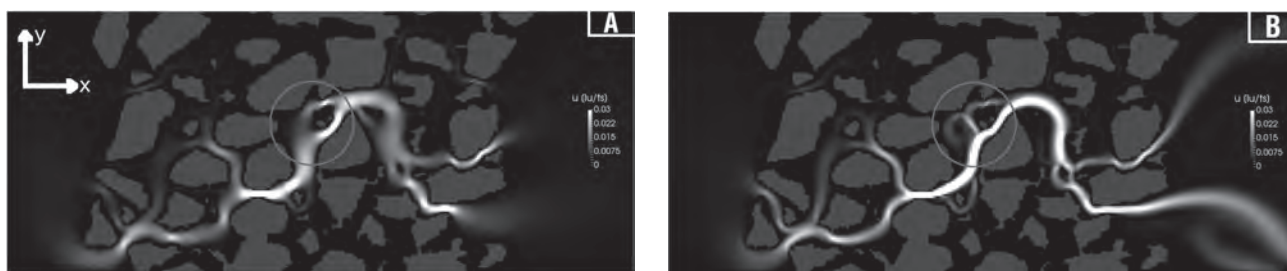


Ryc. 2. Zależność liczby  $\pi$  od liczby  $Re$  wyznaczone numerycznie metodą LBM (kółka) dla rzeczywistego ośrodka o  $n_c = 0,49$  zestawione z symulacjami dla sztucznego układu losowego o wysokiej porowatości  $n_c = 0,9$  (Andrade i in., 1999) (trójkąty). Linia przerywana odpowiada wartości krytycznej  $Re = 5$  dla przepływu laminarnego

Fig. 2. The dependence of the number  $\pi$  on the  $Re$  number determined numerically by the LBM (circle) method for the real porous medium at  $n_c = 0.49$  compared to simulations for the high random porosity  $n_c = 0.9$  (Andrade et al., 1999) (triangles). The dashed line corresponds to the critical value  $Re = 5$  for laminar flow

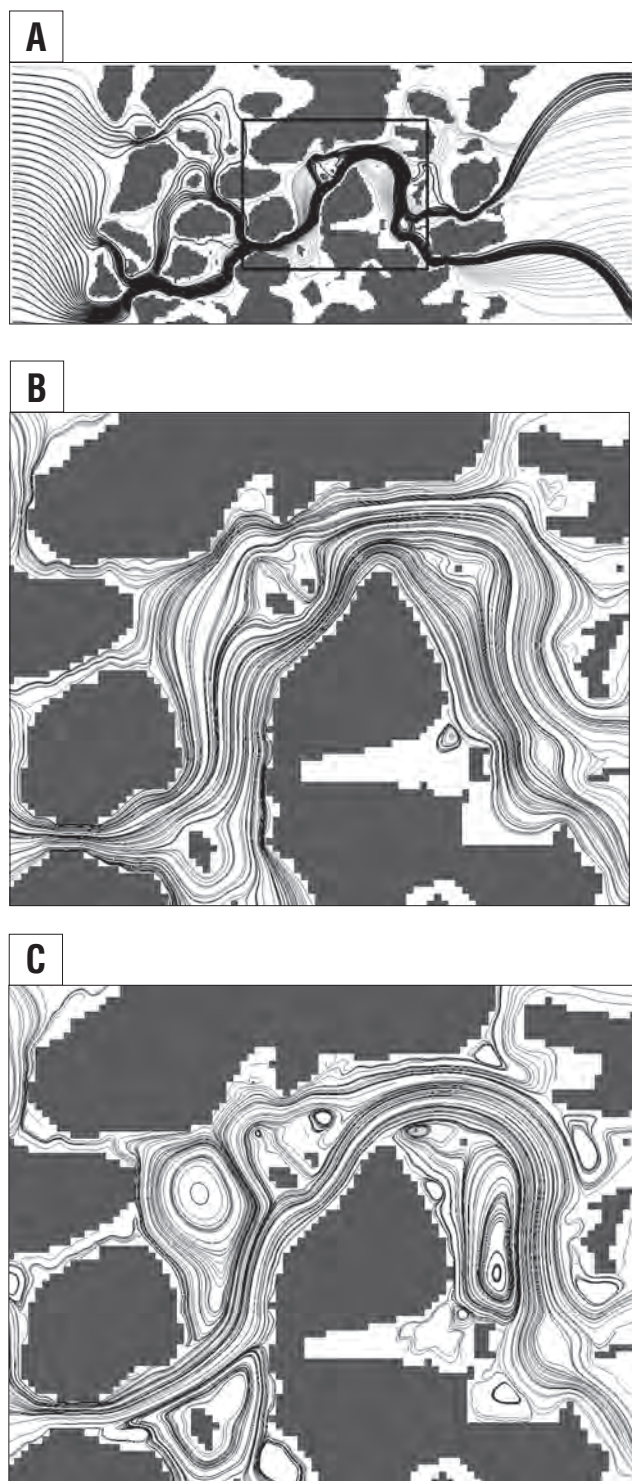
$\mu$  w zależności od różnicy ciśnień  $dp$  pochodzących z symulacji przepływu LBM dla kolejno wzrastających wartości liczb  $Re$ . Wartości lepkości  $\mu$  (oznaczone czarnymi kwadratami) są opisane wartościami liczby  $Re$ , dla których zostały obliczone w wyniku symulacji modelem LBM. Analiza odchylenia lepkości  $\mu$  od zależności liniowej pozwala uznać,





**Ryc. 3.** Diagramy prezentują pole prędkości przepływu wody (wartości bezwzględne) dla liczby  $Re = 1$  (A) oraz  $Re = 25$  (B). Woda przepływa wzdłuż osi X w kierunku od lewej do prawej

**Fig. 3.** The graphs show the velocity field of water flow (absolute values) for  $Re = 1$  (A) and  $Re = 25$  (B). Water flows in x direction from left to right.



że stosowanie prawa Darcy'ego jest uzasadnione dla  $Re < 5$ . Jakość dopasowania punktów do linii prostej zależy od przyjętej miary wielkości (długości charakterystycznej) użytej w definicji liczby  $Re$ .

Obliczone według wzoru (6) wartości liczby  $\pi$  dla analizowanych układów wskazują na wyraźny stan nierównowagi rozkładu energii kinetycznej przepływu (ryc. 2).

Z uwagi na problemy ze zbieżnością rozwiązania numerycznego i trudności obliczeniowe wynikające z gęstości siatki numerycznej obliczenia zostały przeprowadzone w zakresie liczby  $Re = 25$  dla układu o porowatości  $n_c = 0,49$ . Uzyskane wyniki wskazują (ryc. 2 – wykres w powiększeniu), że liczba  $\pi$  spada dla niskich wartości  $Re < 5$ , po czym wzrasta, osiągając wartość maksymalną dla  $Re = 25$ . Obserwowane zmiany wartości liczby  $\pi$  łatwiej zinterpretować, analizując przekrój pola prędkości przepływu wzdłuż kierunku x. Ryciny 3A i 3B przedstawiają wartości bezwzględne prędkości w przekroju pola prędkości, odpowiednio dla niskiej ( $Re = 1$ ) i wysokiej ( $Re = 25$ ) wartości liczby Reynoldsa. W analizowanym układzie powstały uprzywilejowane drogi przepływu. Jednak przy wartości  $Re = 25$  strumień przepływu jest bardziej skoncentrowany.

Zaobserwowano także obszary występowania wirów, w tym również obszarów prędkości o kierunku odwrotnym do kierunku przepływu makroskopowego wody. Powstawanie takich zjawisk dobrze obrazują ryciny 4 A–C przedstawiające linie prądu wody w przepływie wzdłuż kierunku x dla różnych liczb Reynoldsa. Różnicę między wynikami przy niższej i wyższej wartości  $Re$  można tłumaczyć zwiększoną rolą sił inercyjnych względem lepkości w zakresie wysokich  $Re$ . Taką interpretację zmian pola prędkości przepływu wody mogą potwierdzać obserwacje uzyskanych wartości liczby  $\pi$ . Na podstawie symulacji przepływu można również stwierdzić, że już przy niskich wartościach  $Re = 1$ , koncentrowanie strumienia wody może obniżyć porowatość efektywną w obsypce żwirowej.



**Ryc. 4.** Linie prądu w przepływie przez badany układ w całości (A) oraz przez wybrany fragment dla  $Re = 1$  (B) i dla  $Re = 25$  (C). Pogrubione linie reprezentują tory cząstek dla  $Re = 25$ . Linie cienkie przedstawiają wynik dla  $Re = 1$ . Układ współrzędnych taki sam jak na rycinie 3A.

**Fig. 4.** Streamlines in the flow through the system under test (A) and in selected fragments at  $Re = 1$  (B) and  $Re = 25$  (C). Bold lines represent the trajectory of the particles for  $Re = 25$ . The thin lines represent the result for  $Re = 1$ . The coordinate system is the same as in Figure 3A.

## PODSUMOWANIE

Wyniki naszych symulacji stanowią potwierdzenie licznych danych eksperymentalnych, które w warunkach wysokiej liczby Reynoldsa wykazują stopniowe przejście od liniowego do nieliniowego przepływu wody w ośrodku porowym. Wykazaliśmy też, że zmianę charakteru przepływu można scharakteryzować za pomocą rozkładu energii kinetycznej. Przepływ obserwowany przy wysokich wartościach liczby  $Re$  jest szybszy i skoncentrowany w węższej przestrzeni porowej niż przy wartościach niższych. Jak wykazały badania, ruch laminarny w osypkach żwirowych jest możliwy dla  $Re < 5$ , jednak przepływowi towarzyszy koncentrowanie strumienia wody. Dla wartości  $Re > 5$  obserwujemy powstawanie struktur wirowych. Prawdopodobnie proces ten prowadzi do zmniejszenia porowatości efektywnej ośrodka oraz wpływa na wielkość strat hydraulicznych. Potwierdzenie tych hipotez wymaga jednak osobnych, szczegółowych badań.

## LITERATURA

ANDRADE JR. J.S., COSTA U.M.S., ALMEIDA M.P., MAKSE H.A., STANLEY H.E., 1999 – Inertial Effects on Fluid Flow through Disordered Porous Media. *Phys. Rev. Lett.*, 82: 5249–5252.  
BEAR J., CHENG A., 2010 – Modeling groundwater flow and contaminant transport. Springer, Netherlands.  
BERNSDORF J., BRENNER G., DURST F., 2000 – Numerical analysis of the pressure drop in porous media flow with lattice Boltzmann (BGK) automata. *Comp. Phys. Comm.*, 129 (1–3): 247–255.

CHAI Z., SHI B., LU J., GUO Z. 2010 – Non-Darcy flow in disordered porous media: A lattice Boltzmann study. *Comput Fluids*, 39 (10): 2069–2077.  
DĄBROWSKI J., MYSIAK M. 1971 – Wytyczne obliczeń dopuszczalnych prędkości wlotowych wody do studni. Wyd. Geol., Warszawa.  
HAUSSENER S., JERJEN I., WYSS P., STEINFELD A., 2012 – Tomography-based determination of effective transport properties for reacting porous media. *J Heat Transf*, 134(1): 012601–012608.  
GONET A., MACUDA J., ZAWISZA L., DUDA R., PORWISZ J. 2011 – Instrukcja obsługi wierceń hydrogeologicznych. Wyd. AGH, Kraków.  
HELLSTRÖM J.G.I., LUNDSTRÖM T.S., 2006 – Flow through Porous Media at Moderate Reynolds Number. [W:] 4th International Scientific Colloquium: Modelling for Material Processing. University of Latvia, Riga, Latvia, June 8–9: 129–134.  
HSIEH H. T., BROWM G.O., STONE M.L., LUCERO D.A. 1998 – Measurement of porous media component content and heterogeneity using gamma ray tomography. *Water Resour. Res.*, 34 (3): 365–372.  
JONES S.C., 1987 – Using the inertial coefficient,  $b$ , to characterize heterogeneity in reservoir rock. [W:] SPE 16949, presented at SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Dallas, Texas, USA; September: 27–30.  
SKOLASIŃSKA K. 2000 – Przeobrażenia osadów doliny rzecznej w warunkach infiltracji wód powierzchniowych na przykładzie poznańskich ujęć wód wody. [Rozpr. dokt.]. UAM, Poznań.  
SUCCI S., 2001 – The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond (Numerical Mathematics and Scientific Computation). Oxford University Press.  
STANLEY H.E., ANDRADE J.S. 2001 – Physics of the cigarette filter: fluid flow through structures with randomly-placed obstacles. *Physica A*, 295 (1–2): 17–30.  
WANG S., FENG Q., HAN X.A., 2013 – Hybrid Analytical/Numerical Model for the Characterization of Preferential Flow Path with Non-Darcy Flow. *PLoS ONE* 8(12): e83536.  
ZENG Z., GRIGGA G., 2006 – Criterion for Non-Darcy Flow in Porous Media. *Transport in Porous Media*, 63: 57–69.