

Porównanie modeli przepływu wód podziemnych wykorzystujących metody elementów analitycznych AEM oraz różnic skończonych FDM – studium przypadku

Grzegorz Nikiel¹

Comparison groundwater flow modeling using the analytic element method AEM and finite difference method FDM – a case study. Prz. Geol., 65: 1229–1233.

Abstract. Solutions to many issues related to groundwater flow require mathematical modeling. Commonly used models for solving groundwater flow equations - finite difference method (FDM) or finite element method (FEM) are at present proven tools of hydrogeologists. The most popular MODFLOW – based FDM algorithm has been tested in thousands of cases and is now the standard in groundwater flow modeling. Apart from the known advantages of numerical modeling based on FDM or FEM methods, their disadvantage might be the need of extensive discretization of the modeled area and finding a compromise between the accuracy and complexity of the numerical model. In general implementation of advanced numerical models of groundwater flow and doing extensive spatial discretization requires a commitment of considerable time and resources. The article presents a comparison of piezometric head FDM modeling results using the MODFLOW model with the results of AEM model using analytical method. The AEM model does not require discretization of the modeled area at all, which simplifies the data entry and allows for relatively quick modeling of the problem case. The absence of the discretization effort allows for quick change of model parameters, which in consequence allows to explore many variants of the simulation in less time than by using the FDM model. To compare the two modeling methods, the author utilized spatial discretisation that was originally developed within the FDM model applied for optimization of dewatering with the drainage wells of the construction excavations at the wastewater treatment plant in Myszków.

Keywords: AEM, Analytic Element Method, numerical model of groundwater flow, MODFLOW, FDM

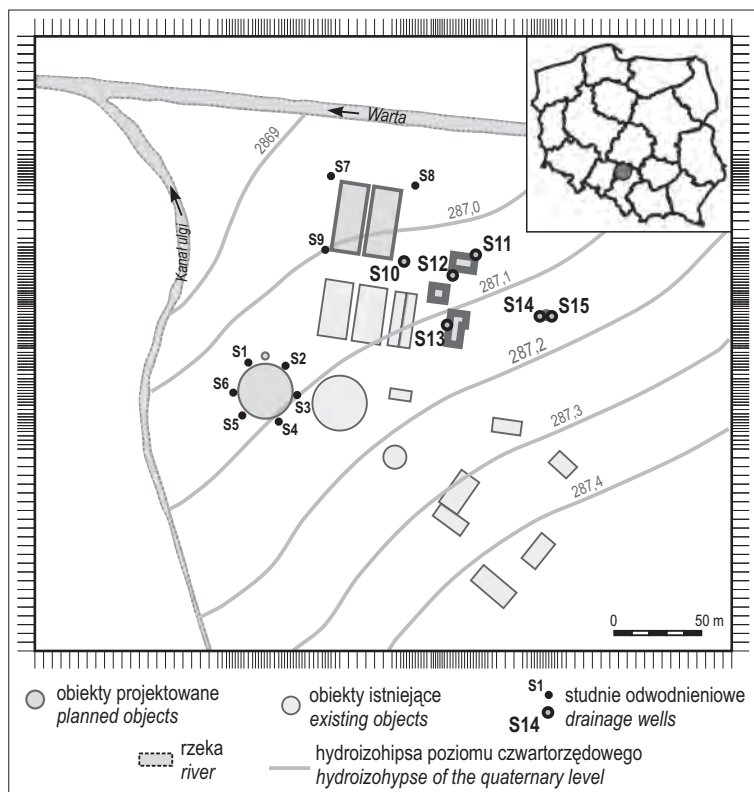
Przepływ wód podziemnych o zwierciadle swobodnym jest najczęściej modelowany z wykorzystaniem numerycznych metod FDM i FEM, które do rozwiązania równań filtracji wymagają podziału modelowanego obszaru na bloki lub elementy obliczeniowe (Zdechlik, 2016). Metoda elementów analitycznych (AEM) nie należy do grupy metod numerycznych, w których otrzymane rozwiązanie jest najczęściej przybliżone. Każdy model AEM jest zbudowany z elementów analitycznych, za pomocą których można symulować w modelowanym obszarze studnie, rzeki, jeziora, zasilanie czy niejednorodność warstwy wodonośnej. Każdy z elementów analitycznych reprezentujący określony obiekt lub wymuszenie zewnętrzne modelu, ma przypisaną mu funkcję analityczną. Funkcja ta ma pewną liczbę stopni swobody odpowiadających liczbie jej stałych współczynników. Wartości poszczególnych współczynników są tak dobierane, żeby rozwiązanie równania przepływu wód podziemnych spełniało warunki brzegowe określone w tzw. punktach wiążących. Każdy rodzaj warunku brzegowego generuje odpowiednie równanie wiążące – ustalając liczbę punktów wiążących równą liczbie stopni swobody, otrzymuje się układ równań różniczkowych umożliwiając wyznaczenie wartości współczynników funkcji analitycznej danego elementu (Strack, 1989; Rogoż, 2007). Powstały układ równań różniczkowych jest rozwiązywany metodą superpozycji odpowiednich rozwiązań analitycznych bez dzielenia modelowanego obszaru na bloki obliczeniowe (Strack, Haitjema, 1981a, b). Złożoność modelu AEM nie zależy więc od jego wielkości a od liczby elementów analitycznych opisujących warunki hydrogeologiczne oraz od sposobu ich odwzorowania w modelu (dyskretyzacji). Ponadto uzyskane rozwiązanie jest ciągłe i tak samo dokładne w całym modelowanym obszarze.

Celem publikacji jest porównanie wyników modelowania metodą FDM wykorzystującą pakiet obliczeniowy MODFLOW z modelem wykorzystującym metodę elementów analitycznych AEM. Ponieważ model AEM nie wymaga dyskretyzacji modelowanego obszaru (dyskretyzacji podlegają tylko jego poszczególne elementy), wprowadzanie danych ulega znacznemu uproszczeniu, a odwzorowanie modelu koncepcyjnego nie wymaga dużego nakładu pracy. Ponadto ze względu na brak siatki dyskretyzacyjnej jest także możliwa dość łatwa zmiana parametrów modelu lub dodanie do niego nowych elementów. W konsekwencji wykorzystanie modelu AEM umożliwi przeprowadzenie wielu symulacji dla różnych warunków brzegowych, parametrów hydrogeologicznych oraz warunków pracy wyróżnionych obiektów (np. studni) w znacznie krótszym czasie niż za pomocą modelu FDM. Porównanie metody iteracyjnej FDM z metodą analityczną AEM wykonano z wykorzystaniem opracowanego wcześniej modelu FDM optymalizującego prowadzenie odwodnienia budowlanego obiektów oczyszczalni ścieków w Myszkowie (Nikiel, 2010).

STUDIUM PRZYPADKU

Oczyszczalnia ścieków w Myszkowie jest zlokalizowana poza terenem zurbanizowanym, a jej granicę stanowią dwa cieki – od północy Warta i od zachodu jej kanał ulgi. Układ cieków ma tu duży wpływ na kształtowanie pola hydrodynamicznego (ryc. 1). W poziomie posadowienia odwadnianych obiektów występuje jedna warstwa wodonośna związana z utworami czwartorzędowymi wypełniającymi dolinę kopalną Warty. Spąg utworów wodonośnych występuje tu na rzędnej ok. 263 m n.p.m., natomiast zwierciadło wody zalega na rzędnych ok. 286–287 m n.p.m.

¹ GEOBIOS Sp. z o.o., ul. Tartakowa 82, 42-202 Częstochowa; g.nikiel@gmail.com.



Ryc. 1. Modernizowana oczyszczalnia ścieków w Myszkowie
 Fig. 1. Wastewater treatment plant in Myszków under modernization

Pierwotny model FDM (Nikiel, 2010) wykorzystujący model MODFLOW (McDonald, Harbaugh, 1988) zakładał odwodnienie trzech grup obiektów i uwzględnił etapowanie prowadzonych robót odwodnieniowych. Optymalizacja zakresu odwodnienia poszczególnych obiektów uwzględniała dwa kryteria: uzyskanie w środku odwadnianego wykopu wymaganego obniżenia zwierciadła wody oraz ograniczenie rozwoju lejów depresji w obrębie istniejących obiektów tak, żeby zminimalizować możliwe osiadanie gruntu. Na potrzeby porównania metody AEM z metodą FDM odwzorowano na modelu AEM odwodnienie grupy obiektów III z aktywnymi studniami od S10 do S15 (Nikiel, 2010). W tym celu dane wejściowe zoptymalizowanego modelu FDM dla tego etapu odwodnienia wykorzystano do utworzenia analogicznego modelu AEM.

MODEL FDM

Obszar badań objęty modelem o wymiarach 350 × 400 m zdyskretyzowano siatką prostokątną o wymiarach w zakresie od 5,00 do 1,25 m. Najmniejsze rozmiary bloków przy-

jęto w rejonie odwadnianych obiektów i w miejscach lokalizacji studni odwadniających. Kształt i rozmiar oczek siatki dyskretyzacyjnej modelu MODFLOW nie pozwalała na lokalizację wszystkich studni odwadniających w węzłach siatki. Modelowany obszar podzielono na 133 bloki wzdłuż osi X i 123 bloki wzdłuż osi Y (ryc. 1). Model FDM zawierał jedną warstwę bloków i był przygotowany do symulacji przepływu wód podziemnych ze swobodnym zwierciadłem wody przy ustalonych warunkach filtracji. Dla modelu FDM przyjęto warunek III rodzaju w części północnej i zachodniej – rzeka Warta i kanał ulgi. Pozostałe segmenty brzegu były odsunięte daleko od modelowanego zespołu studni odwodnieniowych i warunki na nich panujące nie wpłynęły znacząco na uzyskane rozwiązania. Na całym modelowanym obszarze przyjęto zasilenie powierzchniowe z infiltracji opadów w wysokości $3,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{d}$. Spąg warstwy wodonośnej ustalono na rzędnej 263 m n.p.m. oraz przyjęto, że współczynnik filtracji poziomej czwartorzędowej wynosi 6,9 m/d. Studnie odwodnieniowe symulowano w modelu za pomocą modułu Well programu Processing Modflow (Chiang, 2005; Kulma, Zdehlik, 2009). Do potrzeb porównania modelu AEM i FDM przyjęto pracę 6 studni odwadniających obiektu grupy III.

W modelu FDM studnie symulowano jako dogłębione, a przyjęte wydajności tych studni są wynikiem optymalizacji modelu FDM dla podanych wcześniej kryteriów. W trakcie realizacji prac odwodnieniowych głębokość rzeczywistych studni dobrano na podstawie otrzymanych depresji dla obliczeń modelu FDM, co było podyktowane optymalizacją kosztów wykonania odwodnienia. Parametry przyjętych do wykonania studni odwadniających przedstawiono w tabeli 1.

MODEL AEM

Do wykonania modelu AEM wykorzystano program Visual AEM (Craig, Mattot, 2009). Program ten jest graficznym interfejsem, posiadającym cechy systemu GIS, umożliwiającym przygotowanie danych i prezentację wyników wielowarstwowych modeli 2-D wykorzystujących do rozwiązywania równań przepływu i transportu metodę elementów analitycznych. Program VisualAEM, wykorzystując algorytm Ostrich (Matott, 2005) pozwala na półautomatyczną kalibrację modelu. Zastosowanie w programie VisualAEM trzech silników obliczeniowych – Bluebird/

Tab. 1. Główne parametry studni odwadniających
 Table 1. Parameters of drainage wells

Studnia Drainage well	Wydajność [m ³ /d] Discharge [m ³ /d]	Średnica studni [m] Well diameter [m]	Głębokość studni [m] Well depth [m]
S10	750	0,4	18
S11	800	0,4	15
S12	800	0,4	15
S13	750	0,4	13
S14	600	0,4	13
S15	600	0,4	13

Tab. 2. Elementy analityczne dostępne w programie VisualAEM na podstawie (James Craig, Mattot, 2009)
Table 2. Analytical elements available in VisualAEM based on (Craig, Mattot, 2009)

<i>Analytical elements / Składniki analityczne</i>		B¹	S²	T³
Wells Studnie	<i>Fully-penetrating Vertical Discharge Wells (Steady-state) / Studnie dogłębione (warunki ustalone)</i>	+	+	+
	<i>Fully-penetrating Discharge Wells (Transient; Theis) / Studnie dogłębione (warunki nieustalone)</i>	+	-	-
	<i>Partially-penetrating Vertical Wells / Studnie niedogłębione</i>	-	-	+
	<i>Fully-penetrating Head-Specified Vertical Wells / Studnie dogłębione – warunek I rodzaju</i>	+	-	-
Rivers Rzeki	<i>Horizontal Wells / Studnie poziome</i>	+	+	+
	<i>Head-Specified Rivers / Rzeki – warunek I rodzaju</i>	+	+	+
	<i>Extraction-Specified, Resistance-Specified Rivers / Rzeki drenujące, z przepływem przez osady denne</i>	+	+	-
	<i>Surface Drains / Dreny powierzchniowe</i>	+	-	-
Lakes Jeziora	<i>Disconnected Rivers / Rzeki bez łączności z warstwą wodonośną</i>	+	-	-
	<i>Head-Specified Polygonal Lakes / Jeziora – warunek I rodzaju – poligon</i>	+	+	+
	<i>Head-Specified Circular/Elliptical Lakes / Jeziora – warunek I rodzaju – okrąg, elipsa</i>	+	+	-
	<i>Extraction-Specified Polygonal/Elliptical Lakes / Jeziora drenujące – poligon, elipsa</i>	+	+	-
	<i>Resistance-Specified Polygonal Lakes / Jeziora z przepływem przez osady denne – poligon</i>	+	+	+
Recharge Leakage Zones Strefy zasilania / przesączania	<i>Resistance-Specified Circular Lakes / Jeziora z przepływem przez osady denne – okrąg</i>	+	+	-
	<i>Polygonal Recharge/Leakage Zones (Uniform) / Jednolite strefy zasilania/przesiakiwania – poligon</i>	+	+	+
	<i>Polygonal Recharge/Leakage Zones (Multi-quadric) / Niejednolite strefy zasilania/przesiakiwania – poligon</i>	+	+	-
Inhomogeneities Niejednorodność	<i>Circular Recharge/Leakage Zones / Strefy zasilania / przesączania – okrąg</i>	+	-	+
	<i>Polygonal/Circular Inhomogeneities in Conductivity/Porosity / Niejednorodność przewodności / porowatości – poligon, okrąg</i>	+	+	+
	<i>Elliptical/Thin (Polylinear) Inhomogeneities in Conductivity/Porosity / Niejednorodność przewodności / porowatości – elipsa</i>	+	+	-
	<i>Multi-Layer Polygonal Inhomogeneities / Niejednorodność w modelu wielowarstwowym – poligon</i>	-	-	+
Boundary conditions Warunki brzegowe	<i>Polygonal Inhomogeneities in Base Elevation/Thickness / Niejednorodność granicy/miękkości warstwy</i>	+	-	+
	<i>Dirichlet/1st type Boundary Conditions (see Head-specified Rivers) / Warunki brzegowe Dircheleta – I rodzaju</i>	+	+	+
	<i>Neumann/2nd type Boundaries (Normal-discharge-specified) / Warunki brzegowe Neumanna – II rodzaju</i>	+	+	-
	<i>No-Flow Boundaries / Granica z zerowym przepływem</i>	+	+	-
	<i>General-head Boundaries (see Resistance-specified Rivers) / Granica odsunięta – patrz rzeki z przepływem przez osady denne</i>	+	+	-

¹ – Bluebird/Cardinal; ² – Split; ³ – TimML

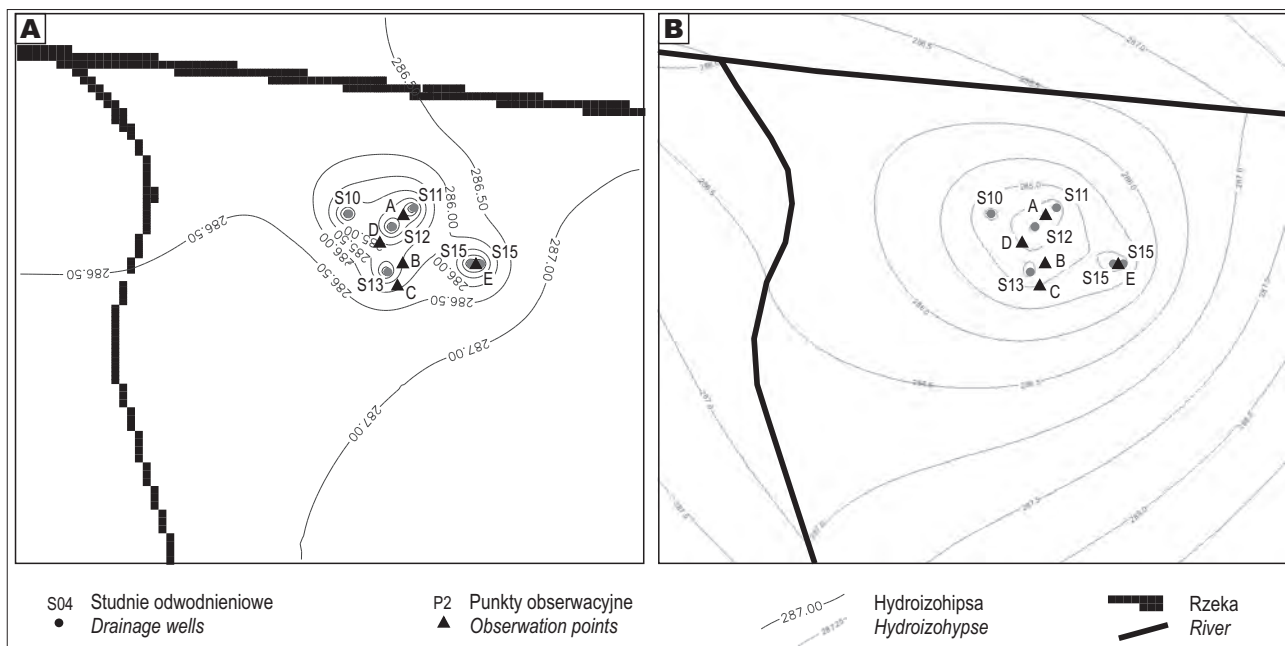
Cardinal (Craig, 2002), Split (Jankovic, 2001) i TimML (Bakker, 2004) umożliwia definiowanie różnych elementów analitycznych modelu, co w konsekwencji pozwala na dostosowanie modelu do rozwiązywania zagadnień różniących się rodzajami wymuszeń czy instalacji. Zestawienie możliwych do zdefiniowania w modelu elementów analitycznych w zależności od poszczególnych silników obliczeniowych przedstawiono w tabeli 2. W niniejszej pracy równania modelu AEM rozwiązywano za pomocą silnika Bluebird/Cardinal.

Ponieważ celem badań było porównanie dwóch metod modelowania nie modyfikowano modelu AEM celem optymalizacji przyjętego dla modelu FDM zespołu odwadniającego lecz parametry modelu AEM przyjęto analogicznie jak dla zoptymalizowanego wcześniej modelu FDM. Warstwę wodonośną symulowano jako jedną, jednorodną warstwę o swobodnym zwierciadle wody. Za pomocą elementów analitycznych zdefiniowanych w programie VisualAEM odwzorowano: studnie, rzekę, zasilanie z opadów oraz zasięg obszaru symulowanego przepływu wód podziemnych. Jak wspomniano w modelach AEM obszar, w którym wykonywano obliczenia, nie podlegał dyskretyzacji. Natomiast dyskretyzacji podlegały poszczególne elementy analityczne odwzorowujące w modelu rzeki czy studnie. Geometryczne odwzorowanie rzek w modelu AEM jest realizowane w postaci połączonych elementów liniowych (krzywej łamanej), których wielkość stanowi o dokładności odwzorowania geometrii rzeki w planie, natomiast studnie są reprezentowane jako okręgi o zadanym

promieniu. Podobne zasady dotyczą pozostałych elementów odwzorowanych w modelu AEM. Wartę i kanał ulgi symulowano jako elementy liniowe, zadając w poszczególnych węzłach poziom zwierciadła wody. Studnie ujęcia symulowano jako elementy o stałym wydatku, takim jak w modelu FDM. Wartości współczynnika filtracji warstwy wodonośnej i wielkość zasilania infiltracyjnego przyjęto również takie same jak w modelu numerycznym.

WYNIKI

Rozwiązaniami modeli FDM i AEM są przestrzenne rozkłady wysokości hydraulicznej (hydroizohipsy) w odwadniającej warstwie wodonośnej, które w tym przypadku są identyczne z mapami położenia swobodnego zwierciadła wody. W rezultacie na podstawie rozkładów obliczonych za pomocą dwóch modeli różniących się co do opisu teoretycznego wykreślono dwie różne mapy zwierciadła wód podziemnych. Mapy zwierciadła wody dla obu metod modelowania przedstawiono na rycinie 2. Porównanie położenia zwierciadła wód podziemnych w odwadniającej warstwie wodonośnej przeprowadzono w 5 punktach kontrolnych zlokalizowanych w rejonie odwadnianych obiektów oraz w studniach odwadniających, których lokalizację przedstawiono na rycinie 2. Położenie zwierciadła wody wyznaczone na podstawie obliczeń modelu numerycznego MODFLOW (FDM) są wartościami przybliżonymi, których błąd zależy silnie od rozmiarów bloku obliczeniowego, w którego węzle program oblicza wartość średnią położenia



Ryc. 2. Zwierciadło wody obliczone przez model: A – FDM, B – AEM
 Fig. 2. Head contour calculated by: A – FDM, B – AEM

zwierciadła wody. W przypadku modelu wykorzystującego metodę elementów analitycznych (AEM) obliczone położenie zwierciadła wody w każdym punkcie modelowanego obszaru są dokładnie takie, jakie przyjmuje w tym punkcie funkcja analityczna reprezentująca wysokość hydrauliczną w danym elemencie (z dokładnością do reprezentacji tej funkcji w komputerze). Położenie zwierciadła wody w wytypowanych punktach kontrolnych i studniach przedstawiono w tabeli 3.

PODSUMOWANIE

Rzędne położenia zwierciadła wody wyznaczone za pomocą modeli FDM i AEM w punktach kontrolnych są zbliżone, przy czym zwierciadło wody w punktach kontrolnych w modelu FDM leży niżej niż w modelu AEM. Można więc stwierdzić, że otrzymany rozkład położenia zwierciadła wody w rejonie odwadnianych obiektów jest zbliżony, a występujące różnice wynikają z odmiennego sposobu rozwiązania równań przepływu wód podziemnych. Odrębnego komentarza wymaga porównanie obliczeń w punk-

tach lokalizacji studni odwadniających. Występują tu dość duże różnice zawierające się w przedziale od -1,7 do -2,2 m. Obliczone położenie zwierciadła wody dla modelu FDM w bloku obliczeniowym, w którym zlokalizowano studnie, jest zazwyczaj obarczone dużym błędem w stosunku do warunków rzeczywistych. Wynika to z następujących przyczyn:

- w bezpośrednim sąsiedztwie studni występują duże (fizyczne) różnice położenia zwierciadła wody w miarę zbliżania się do osi studni. Bez odpowiedniego algorytmu zagęszczenia siatki dyskretyzacyjnej model FDM nie jest w stanie odwzorować tych różnic z dostateczną dokładnością;
- w modelu FDM jest obliczane średnie położenie zwierciadła wody w węzle bloku obliczeniowego, a nie w punkcie lokalizacji studni, która może być zlokalizowana na brzegu bloku obliczeniowego.

Powyższe czynniki sprawiają, że obliczane w modelu FDM wartości wysokości zwierciadła wody w obszarach gdzie następuje jego duże zróżnicowanie (w studni, na zboczu leja depresji), są najczęściej wartościami znacznie

Tab. 3. Porównanie położenia zwierciadła wody w punktach obserwacyjnych wyznaczone za pomocą modeli FDM (MODFLOW) i AEM
 Table 3. Comparison of head at the observation points calculated with FDM (Modflow) and AEM models

Punkt obserwacyjny Observation point	Rzędna zwierciadła wody wg modeli [m n.p.m.] Groundwater head [m a.s.l.]		Różnica zwierciadła wody między modelami [m] Difference in head [m] FDM-AEM
	Processing Modflow (FDM)	VisualAEM (AEM)	
A	284,1	284,3	-0,2
B	285,5	286,0	-0,5
C	285,9	286,0	-0,1
D	285,2	285,5	-0,3
E	284,1	284,7	-0,6
Studnia S10	282,3	284,3	-2,0
Studnia S11	281,7	283,9	-2,2
Studnia S12	281,6	283,9	-2,3
Studnia S13	282,8	284,1	-1,3
Studnia S14	283,0	284,7	-1,7
Studnia S15	283,1	284,8	-1,7

odbiegającymi od rzeczywistych. Częściowym rozwiązaniem może być przeliczenie położenia zwierciadła wody w bloku obliczeniowym ze studnią, jednak stosowane wzory nie uwzględniają położenia studni w obrębie bloku.

Natomiast aproksymacja wysokości hydraulicznej w sąsiedztwie studni za pomocą funkcji analitycznej w modelu AEM znacznie lepiej przybliża kształt rzeczywistego lejka depresji wywołanego poborem wody przez studnię.

Możliwość dokładnego obliczenia wartości poszczególnych funkcji analitycznych w modelu AEM bez potrzeby dyskretyzacji modelu sprawia, że wykorzystanie modeli AEM jest szczególnie predysponowane do symulacji zagadnień związanych z dopływem wód do studni lub projektowaniem zespołów odwadniających. Ponadto, z uwagi na bardzo łatwą modyfikację modelu AEM, może on być wykorzystywany w rozwiązywaniu problemów wymagających prowadzenia wielu symulacji np. dla znalezienia optymalnego rozmieszczenia studni odwadniających zapewniających bezpieczeństwo prowadzenia prac odwodnieniowych.

Badania, których wyniki przedstawiono w artykule zostały sfinansowane ze środków własnych autora.

Autor dziękuje Recenzentowi za poświęcony czas na konsultacje, cenne uwagi oraz wysiłek włożony w ocenę artykułu.

LITERATURA

- BAKKER M. 2004 – TimML: a multiaquifer analytic element model version 2.1. Univ. of Georgia, Athens, Ga., www.engr.uga.edu/~mbakker/TimML.
- CHIANG W.H. 2005 – 3D-Groundwater Modeling with PMWIN. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag. <http://link.springer.com/10.1007/3-540-27592-4>.
- CRAIG J. 2002 – Bluebird developers manual. Rap. tech., Department of Civil, Structural, and Environmental Engineering, University at Buffalo, Buffalo, NY.
- CRAIG J., MATTOT S. 2009 – Visual AEM (Wersja 1.04). <http://www.civil.uwaterloo.ca/jrcraig/visualaem>.
- JANKOVIC I. 2001 – Win32 computer program for analytic-based modeling of single-layer groundwater flow in heterogeneous aquifers with particle tracking, capture-zone delineation, and parameter estimation.
- KULMA R., ZDECHLIK R. 2009 – Modelowanie procesów filtracji. AGH Uczelniane Wyd. Naukowo-Dydaktyczne.
- MATOTT L. S. 2005 – OSTRICH: An optimization software tool: Documentation and users guide. University at Buffalo, Buffalo, NY.
- MCDONALD M.G., HARBAUGH A.W. 1988 – A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model (USGS Numbered Series No. 06-A1) (s. 586). U.S. Geological Survey. <http://pubs.er.usgs.gov/publication/twri06A1>.
- NIKIEL G. 2010 – Wykorzystanie numerycznego modelu filtracji wód podziemnych przy projektowaniu odwodnienia wykopów budowlanych na terenie modernizowanej oczyszczalni ścieków w Myszkowie. Biul. Państw. Inst. Geol., 442: 137–142.
- ROGOŹ M. 2007 – Dynamika wód podziemnych. Główny Instytut Górnictwa, Katowice.
- STRACK O.D.L. 1989 – Groundwater mechanics. Wyd. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, s. 732.
- STRACK O.D.L., HAITJEMA H.M. 1981a – Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities: 1. Solution for homogeneous permeability. Water Resources Research, 17(5): 1535–1549.
- STRACK O.D.L., HAITJEMA H.M. 1981b – Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities: 2. Solution for inhomogeneous permeabilities. Water Resources Research, 17(5): 1551–1560.
- ZDECHLIK R. 2016 – A review of applications for numerical groundwater flow modeling. W 16th International Multidisciplinary Scientific Geo-Conference SGEM 2016, SGEM Vienna GREEN Extended Scientific Sessions, (T. 3, s. 11–18). STEF92 Technology. <https://doi.org/10.5593/sgem2016HB33>.