

METODYKA ZASTOSOWAŃ MATEMATYCZNEGO MODELU LINIOWEGO DO ANALIZY MAP GEOLOGICZNYCH

UKD 512.2+517.512:550.8.05(084.3):681.3

Model liniowy, stanowiący jeden z najprostszych modeli matematycznych znajduje szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach geologii. Ważnym aspektem analizy geologicznej jest krytyczne testowanie założonego modelu geologicznego, modelu rozwoju procesów geodynamicznych — historii geologicznej rozpatrywanej przestrzeni trójwymiarowej wyznaczonej założoną siatką wierceń.

W naukach geologicznych jedną z podstawowych metod badawczych jest analiza punktów pomiarowych rozmieszczonych na danej, przyjętej do rozważań powierzchni stratygraficznej lub litostratygraficznej. Stworzenie kanwy nakładających się na siebie kolejnych powierzchni, odtwarzających kolejność procesów i zjawisk w aspekcie paleogeograficznym odpowiednio weryfikuje przyjęte a priori założenia, oparte o wiedzę merytoryczną, z którą geolog przystępuje do odpowiednich badań. Konstrukcje map oraz analiza otrzymanych powierzchni jest możliwa do wykonania przy pomocy różnych sposobów. Każdy sposób zakłada oczywiście pewien rodzaj aproksymacji dla otrzymania powierzchni, która podlegać będzie analizie. Aproksymacja taka musi być więc wykonana za pomocą pewnych technik matematycznych (w przy-

padku tradycyjnej konstrukcji map, techniką tą jest interpolacja liniowa). Z kolei analiza kształtu otrzymanej w wyniku aproksymacji powierzchni może być wykonana za pomocą, bądź też bez użycia matematycznych sposobów analizy. W warunkach polskich istnieje obecnie kilka możliwych do przyjęcia technik opracowania i analizy map geologicznych.

Artykuł przedstawia udokumentowaną propozycję, mogącą podlegać weryfikacji w trakcie prowadzenia dalszych prac naukowych w tej dziedzinie, dotycząca zastosowania wielomianów potęgowych i podwójnych szeregów Fouriera do aproksymacji i analizy powierzchni geologicznych. Podstawą całości rozumowania opisanego poniżej jest założenie że:

1. Istnieją ciągłe powierzchnie geologiczne.
2. Każda powierzchnia geologiczna powstała w wyniku działania określonego procesu geologicznego lub zespołu procesów, co ma ten skutek, że można założyć pewną prawidłowość jej kształtu. Działanie to nie miało charakteru przypadkowego, ale podlegało pewnym prawom co ma taki skutek, że istnieje tendencja zwana trendem, charakteryzująca tę powierzchnię. Może to być nachylenie, określony kształt itp. Gdyby środowisko, na które proces lub procesy geologiczne

działały było idealnie jednorodne, a proces w każdym punkcie przestrzeni działałby z jednakową intensywnością wyidealizowana powierzchnia ściśle odpowiadałaby trendowi, ponieważ jednak żaden z tych warunków nie jest spełniony i ponieważ powierzchnię badamy *ex post*, czyli gdy na nią działały także procesy późniejsze, obecna jej postać zawiera w sobie trend i jakąś bliżej nieokreśloną część mającą charakter losowy. Analiza trendu ma za zadanie oddzielić trend od części losowej.

Rozpatrując powyższe stwierdzenia w skali jakiegos czasu można stwierdzić, że odtwarzając kształt powierzchni i analizując go rozpatruje się kolejne reakcje środowiska geologicznego na działanie procesów, występujących w różnym czasie. Przyjmuje się więc, prowadząc analizę, że bada się stan w pewnej chwili, zakładając jednocześnie, że jakiś określony zespół procesów lub proces główny ukształtował badaną powierzchnię, a procesy późniejsze wprowadziły zmiany w jej kształcie.

Przystępując do opisu procesu badawczego zrobimy następujące założenia.

Dany jest obszar pokryty wierceniami (w dowolnej siatce). Każde wiercenie posiada współrzędne x i y . Interesuje nas powierzchnia np. powierzchnia nawiercona na głębokościach z_1, z_2, \dots, z_n w poszczególnych wierceniach.

Zadanie jakie stoi przed nami to:

- Ustalić jaka ma być powierzchnia trendu.
- Znaleźć jej równanie czyli „ z ” jako funkcję x i y .
- Obliczyć mapę trendu.
- Obliczyć pozostałości czyli różnice na wierceniach pomiędzy nawierconą głębokością, a otrzymaną z aproksymacji.
- Wykreślić mapę pozostałości.
- Przeprowadzić analizę poprawności geologicznej otrzymanych map.

Matematycznie zadanie aproksymacji można zapisać następująco:

$$Z = F(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots + f_n(x, y) + R(x, y) \quad (1)$$

gdzie: $f_1(x, y) \dots f_n(x, y)$ — składowe trendu.
 $R(x, y)$ — pozostałość losowa (residuum).

Składową trendu pierwszego rzędu nazywamy powierzchnię otrzymaną w wyniku aproksymacji funkcją liniową lub tzw. pierwszą harmoniczną. Składową trendu pierwszego + drugiego + ... + k -tego rzędu nazywamy powierzchnię otrzymaną w wyniku aproksymacji funkcją potęgową k -tego stopnia lub podwójnymi szeregami Fouriera na k harmonicznych. Pojęcie wielomianu jest znane, pojęcie k -tej harmonicznej zostanie wyjaśnione w dalszej części artykułu.

Jakie są kryteria doboru „właściwej” powierzchni trendowej? Co w ogóle oznacza „właściwa” powierzchnia trendowa? Powierzchnia trendowa ma odzwierciedlać systematyczne zmiany wielkości badanej cechy na płaszczyźnie, przy założeniu, że zostały one spowodowane działaniem określonego procesu lub zespołu procesów geologicznych. Badania przeprowadza się jednak, używając danych zmienionych wpływem procesów późniejszych. W jaki sposób ocenić, czy wpływ ten miał miejsce, a jeżeli tak, to w jaki sposób zmienił pierwotnie ukształtowaną powierzchnię?

Chcąc odpowiedzieć na te pytania zrobimy następujące założenia:

Założenie 1. Rozmieszczenie danych, na powierzchni jest wystarczające w sensie reprezentatywności jej pokrycia, dla jej odwzorowania.

Założenie 2. Znany jest charakter procesu geologicznego tworzącego powierzchnię, którą utożsamiamy z powierzchnią trendową.

Stwierdzenie z punktu 1 znaczy tyle, że rozmieszczenie danych na całym obszarze jest takie, że żadna z istotnych fluktuacji powierzchni nie jest pominięta, natomiast znajomość charakteru procesu geologicz-

nego i jego działania na określone środowisko pozwala nam założyć odpowiednią klasę funkcji (w naszym przypadku wielomian potęgowy lub podwójny szereg Fouriera) do ustalenia „właściwej” powierzchni trendowej.

Dla potwierdzenia przyjętych a priori założeń należy wykonać mapę wyjściową „opiętą” na punktach pomiarowych sposobem tradycyjnym, a następnie przeanalizować główne kierunki zmienności struktur na badanej powierzchni. Zaleca się w tym miejscu, przy skomplikowanej budowie geologicznej, wykonać kilka przekrojów wzdłuż linii prostokątnych do głównych kierunków zmienności. Powinny one pozwolić na określenie rodzaju zmienności cechy i głębokości oraz na przeanalizowanie działania głównego procesu geologicznego, tzn. na określenie jaki rozmiar przestrzenny mogą mieć reakcje środowiska geologicznego na działanie tego procesu. Rodzaj zmienności wskaże, czy należy stosować tu wielomiany potęgowe, czy też podwójne szeregi Fouriera (te ostatnie jeśli fluktuacje są cykliczne).

Wielomianowa wersja równania powierzchni trendowej jest opisana za pomocą wzoru:

$$Z(x, y) = \beta_{00} + \beta_{10}x + \beta_{01}y + \dots + \beta_{kl}x^k y^l \quad [2]$$

gdzie:

Z — jest obserwowaną zmienną zależną (w naszym przypadku jest to głębokość występowania powierzchni stratygraficznej, litostratygraficznej itp.),

x, y — zmienne niezależne, nie obciążone błędem (w naszym przypadku są to współrzędne wierceń),

β_{kl} — stanowią nieznanne parametry, współczynniki dopasowania powierzchni,

np. wielomianowa wersja powierzchni trendowej II stopnia ma postać:

$$Z(x, y) = \beta_{00} + \beta_{10}x + \beta_{01}y + \beta_{11}xy + \beta_{02}y^2 + \beta_{20}x^2 \quad [3]$$

Dla wydruku mapy trendowej wg równania 2 (lub 3) należy mieć określone wartości współczynników $\beta_{00}, \beta_{01} \dots \beta_{kl}$. Wartości tych współczynników znajdują się za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Fourierowski model powierzchni trendowej może być zapisany równaniem:

$$Z = \beta_{00} + \sum_{i,j} F(\beta_{ij}, P_i, \theta_j) \quad [4]$$

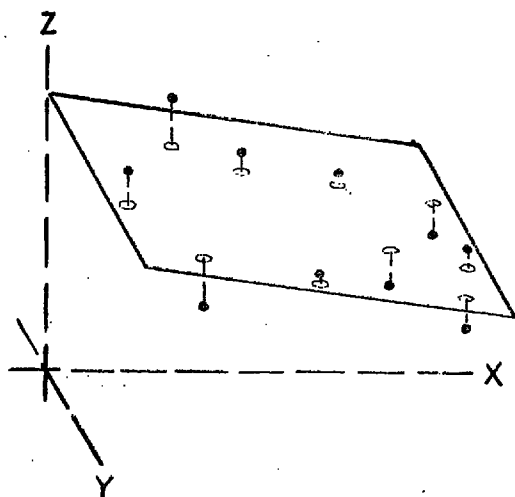
gdzie: i, j — indeksy, zmieniające się od 0 (lub 1) do tzw. połowy podstawowej długości fali (patrz poniżej w równaniu 5)

$$\begin{aligned} a \quad F(\beta_{ij}, P_i, \theta_j) = & c_{ij} \cos P_i \cos \theta_j + \\ & + c_{sj} \cos P_i \sin \theta_j + \\ & + s_{cj} \sin P_i \cos \theta_j + \\ & + s_{sj} \sin P_i \sin \theta_j; \end{aligned}$$

Współczynniki c_{ij}, s_{ij} itd. są odpowiednikami β_{ij} w równaniu [2], a człony: $P_i = 2\pi ix/M$ i $\theta_j = 2\pi jy/N$. M i N to podstawowe długości fali wzdłuż osi x i y .

Mapa trendu, która powstanie jako graficzny obraz realizacji przyjętej klasy funkcji aproksymującej powierzchnię zależnie od współrzędnych y i x na całym obszarze powinna spełniać jednocześnie dwa warunki:

1) powinna to być powierzchnia najbardziej dopasowana do punktów kontrolnych (pomiarów z wierceń) w sensie metody najmniejszych kwadratów. Znaczący to praktycznie tyle, że suma kwadratów odległości



Ryc. 1. Dopasowanie powierzchni do punktów z wierceń, metodą najmniejszych kwadratów.

Fig. 1. Fixation of surface to borehole points by the least square method.

... dane z wierceń; o — dane z aproksymacji.

między danym z wierceń, a danymi z aproksymacji (ryc. 1) powinna być najmniejsza.

2) analiza porównawcza między mapą „opiętą” na punktach i mapą trendu powinna wyraźnie wskazywać, że różnice wynikające z porównań nie wyrażają żadnych prawidłowości i mają charakter całkowicie losowy.

Decyzja odnośnie do klasy funkcji wymaga jeszcze ustalenia stopnia wielomianu lub ilości harmonicznych (w przypadku podwójnych szeregów Fouriera). Stosując jako powierzchnie trendowe wielomiany, geolog w oparciu o wiedzę merytoryczną i ilość wierceń ustala orientacyjnie — wyjściowo stopień wielomianu i w zasadzie stosuje tu metodę kolejnych przybliżeń, doliczając mapy kolejnych wielomianów i drogą testowania statystycznego, obliczając każdorazowo prawdopodobieństwo „obecności” danej składowej lub składowych trendu. Na ryc. 2 przedstawiono geometryczny obraz powierzchni aproksymowanej za pomocą wielomianów pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia wraz z odpowiednimi postaciami równań funkcyjnych.

Przy zastosowaniu podwójnych szeregów Fouriera kryterium wiedzy merytorycznej i ilości wierceń nie wystarcza. Podwójny szereg Fouriera jest to funkcja

$$z = F(x, y) = \sum_{i=0}^{kc} \sum_{j=0}^{lc} c_{ij} \cos(2\pi i x/M) \cos(2\pi j y/N) + \sum_{i=0}^{kc} \sum_{j=0}^{ls} c_{ij} \cos(2\pi i x/M) \sin(2\pi j y/N) + \sum_{i=1}^{ks} \sum_{j=0}^{lc} c_{ij} \sin(2\pi i x/M) \cos(2\pi j y/N) + \sum_{i=1}^{ls} \sum_{j=1}^{ls} s_{ij} \sin(2\pi i x/M) \sin(2\pi j y/N); \quad [5]$$

gdzie:

x, y — współrzędne, zmieniające się wzdłuż osi x i y ,

$z = F(x, y)$ — cecha, której mapa będzie przedmiotem analizy,

M — maksymalne w skali podstawowej długości fali x zwiększone o 1,

N — maksymalne w skali podstawowej długości fali y zwiększone o 1,

$kc = M/2$, gdy M parzyste, lub $kc = (M-1)/2, -1/2$, gdy M nieparzyste, czyli jest to maksymalna harmoniczna cosinusowa w kierunku x ,

$lc = N/2$, gdy N parzyste, lub $lc = (N-1)/2, -1/2$, gdy N nieparzyste, czyli jest to maksymalna harmoniczna cosinusowa w kierunku y ,

$ks = (M-2)/2$, gdy M — parzyste lub $(M-1)/2$, gdy M nieparzyste, czyli jest to maksymalna harmoniczna sinusowa w kierunku x ,

$ls = (N-2)/2$, gdy N parzyste i $ls = (N-1)/2$, gdy N nieparzyste, czyli jest to maksymalna harmoniczna sinusowa w kierunku y .

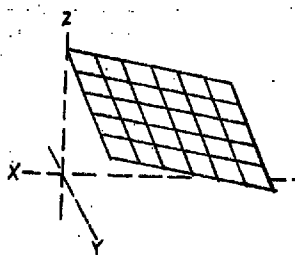
c_{ij} , c_{ij} i s_{ij} są to współczynniki rzeczywiste.

Jak wynika z wyżej opisanego równania funkcyjnego zadaniem początkowym dla geologa jest tu ustalenie wielkości M i N od których zależy postać funkcji. Wielkość M jest to odległość pomiędzy dwoma ekstremami fluktuacji cechy „ z ” wzdłuż osi układu x , wielkość N odpowiednia odległość pomiędzy ekstremami wzdłuż osi układu y . Są to podstawowe „długości fal”. Oceny długości fal dokonuje się na przekrojach wzdłuż osi x i y . Gdy obszar badań ma rozmiar wzdłuż osi x np. 500 jednostek, a cecha zmienia się w ten sposób, że rozmiar okresu zmian cechy wynosi 50 jednostek, to: $M = 500/50 + 1 = 11$. Analogicznie postępuje się wzdłuż osi y , ustalając wielkość N . Gdy na różnych przekrojach wielkości M i N są różnej wielkości, do obliczeń przyjmuje się M i N największe.

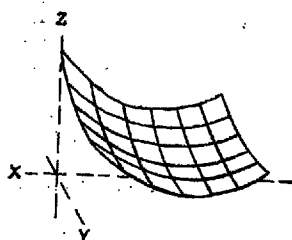
pierwszego stopnia

drugiego stopnia

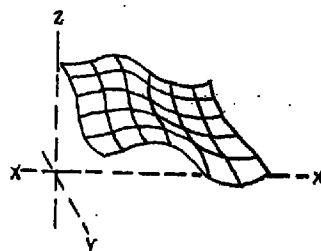
trzeciego stopnia



$$Z = \beta_{00} + \beta_{10} X + \beta_{01} Y$$



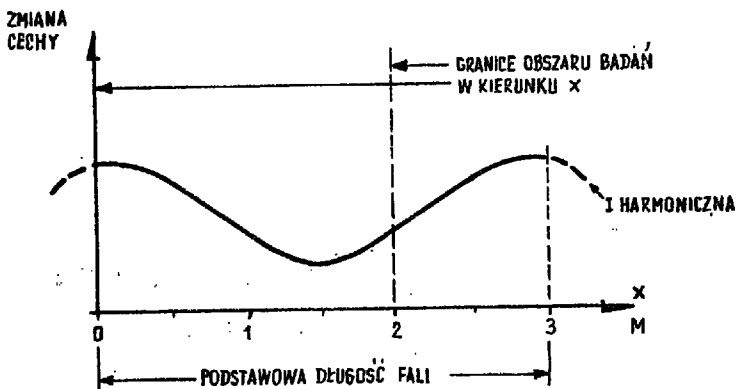
$$Z = \beta_{00} + \beta_{10} X + \beta_{01} Y + \beta_{20} X^2 + \beta_{11} XY + \beta_{02} Y^2$$



$$Z = \beta_{00} + \beta_{10} X + \beta_{01} Y + \beta_{20} X^2 + \beta_{11} XY + \beta_{02} Y^2 + \beta_{30} X^3 + \beta_{21} X^2 Y + \beta_{12} XY^2 + \beta_{03} Y^3$$

Ryc. 2. Geometryczny obraz powierzchni aproksymowanej wielomianami potęgowymi.

Fig. 2. Geometrical image of the surface approximated by power polynomials.



Ryc. 3. Założona zmiana cechy wzdłuż osi x, gdy $M = 3$.

Fig. 3. Assumed change of the feature along the axis X when $M = 3$.

Należy rozpatrzyć jak zmienia się postać funkcji aproksymującej zależnie od przyjęcia różnych wielkości M i N .

Przykład: założmy, że $M = 3$ i $N = 3$,
wtedy: $kc = 1$, $ks = 1$, $lc = ls = 1$,
a postać funkcji jest następująca:

$$z = F(x, y) = cc_{00} + cc_{01} \cos(2\pi y/3) + cc_{02} \cos(4\pi y/3) + cc_{10} \cos(2\pi x/3) + cc_{11} \cos(2\pi x/3) \cos(2\pi y/3) + cc_{12} \cos(2\pi x/3) \cos(4\pi y/3) + cc_{20} \cos(4\pi x/3) + cc_{21} \cos(4\pi x/3) \cos(2\pi y/3) + cc_{22} \cos(4\pi x/3) \cos(4\pi y/3) + sc_{10} \sin(2\pi x/3) + sc_{11} \sin(2\pi x/3) \cos(2\pi y/3) + sc_{12} \sin(2\pi x/3) \cos(4\pi y/3) + sc_{20} \sin(4\pi x/3) + sc_{21} \sin(4\pi x/3) \cos(2\pi y/3) + sc_{22} \sin(4\pi x/3) \cos(4\pi y/3) + ss_{11} \sin(2\pi x/3) \sin(2\pi y/3) + ss_{12} \sin(2\pi x/3) \sin(4\pi y/3) + ss_{21} \sin(4\pi x/3) \sin(2\pi y/3) + ss_{22} \sin(4\pi x/3) \sin(4\pi y/3).$$

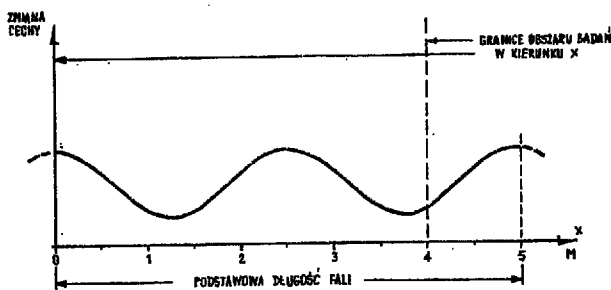
Graficznie, założenie wielkości $M = 3$ odpowiada sytuacji przedstawionej na ryc. 3. Analogiczna sytuacja jest w kierunku y , gdy $N = 3$.

Z powyższego wynika, że gdy rozpatruje się tylko podstawową zmianę cechy otrzymuje się zgodnie z równaniem [6] tzw. pierwszą harmoniczną składową trendu, a z ilości współczynników wynika, że do tego konieczne jest posiadanie co najmniej 9 wartości „z”.

Gdy założy się, że otrzymana powierzchnia ma odwzorowywać dodatkowo zmienność co $1/2$ podstawowej długości fali należy obliczyć 25 współczynników, a M i N należy założyć równe 5. Graficznie przedstawia to ryc. 4.

Postać funkcji w tym przypadku wyraża się wzorem:

$$z = F(x, y) = cc_{00} + cc_{01} \cos(2\pi y/5) + cc_{02} \cos(4\pi y/5) + cc_{03} \cos(6\pi y/5) + cc_{04} \cos(8\pi y/5) + cc_{10} \cos(2\pi x/5) + cc_{11} \cos(2\pi x/5) \cos(2\pi y/5) + cc_{12} \cos(2\pi x/5) \cos(4\pi y/5) + cc_{13} \cos(2\pi x/5) \cos(6\pi y/5) + cc_{14} \cos(2\pi x/5) \cos(8\pi y/5) + cc_{20} \cos(4\pi x/5) + cc_{21} \cos(4\pi x/5) \cos(2\pi y/5) + cc_{22} \cos(4\pi x/5) \cos(4\pi y/5) + cc_{23} \cos(4\pi x/5) \cos(6\pi y/5) + cc_{24} \cos(4\pi x/5) \cos(8\pi y/5) + sc_{10} \sin(2\pi x/5) + sc_{11} \sin(2\pi x/5) \cos(2\pi y/5) + sc_{12} \sin(2\pi x/5) \cos(4\pi y/5) + sc_{13} \sin(2\pi x/5) \cos(6\pi y/5) + sc_{14} \sin(2\pi x/5) \cos(8\pi y/5) + sc_{20} \sin(4\pi x/5) + sc_{21} \sin(4\pi x/5) \cos(2\pi y/5) + sc_{22} \sin(4\pi x/5) \cos(4\pi y/5) + sc_{23} \sin(4\pi x/5) \cos(6\pi y/5) + sc_{24} \sin(4\pi x/5) \cos(8\pi y/5) + ss_{11} \sin(2\pi x/5) \sin(2\pi y/5) + ss_{12} \sin(2\pi x/5) \sin(4\pi y/5) + ss_{13} \sin(2\pi x/5) \sin(6\pi y/5) + ss_{14} \sin(2\pi x/5) \sin(8\pi y/5) + ss_{21} \sin(4\pi x/5) \sin(2\pi y/5) + ss_{22} \sin(4\pi x/5) \sin(4\pi y/5) + ss_{23} \sin(4\pi x/5) \sin(6\pi y/5) + ss_{24} \sin(4\pi x/5) \sin(8\pi y/5).$$



Ryc. 4. Zmiana cechy o $1/2$ podstawowej długości fali, $M = 5$.

Fig. 4. A change of the feature by $1/2$ of basic wave length when $M = 5$.

$$+ cs_{01} \sin(2\pi y/5) + cs_{02} \sin(4\pi y/5) + cs_{11} \cos(2\pi x/5) \sin(2\pi y/5) + cs_{12} \cos(2\pi x/5) \sin(4\pi y/5) + cs_{21} \cos(4\pi x/5) \sin(2\pi y/5) + cs_{22} \cos(4\pi x/5) \sin(4\pi y/5) + sc_{10} \sin(2\pi x/5) + sc_{11} \sin(2\pi x/5) \cos(2\pi y/5) + sc_{12} \sin(2\pi x/5) \cos(4\pi y/5) + sc_{20} \sin(4\pi x/5) + sc_{21} \sin(4\pi x/5) \cos(2\pi y/5) + sc_{22} \sin(4\pi x/5) \cos(4\pi y/5) + ss_{11} \sin(2\pi x/5) \sin(2\pi y/5) + ss_{12} \sin(2\pi x/5) \sin(4\pi y/5) + ss_{21} \sin(4\pi x/5) \sin(2\pi y/5) + ss_{22} \sin(4\pi x/5) \sin(4\pi y/5).$$

Naturalnie można założyć np. $M = 5$ a $N = 4$, co spowoduje odwzorowanie, zakładające różną zmienność cechy w obu kierunkach: x i y . We wzorze [7] wyrazy ze współczynnikami: cc_{02} , cc_{12} , cc_{20} , cc_{21} , cc_{22} , cs_{02} , cs_{12} , cs_{21} , cs_{22} , sc_{12} , sc_{20} , sc_{21} , sc_{22} , ss_{12} , ss_{21} , ss_{22} odwzorowują powierzchnię zmieniając się co $1/2$ podstawowej długości fali. Sumaryczna powierzchnia obliczona wg wzoru [7] stanowi I + II harmoniczną składową trendu.

Jak wynika z powyższego, użycie wyższych harmonicznych do aproksymacji powierzchni wymaga dużej ilości danych. W geologii będą to np. otwory wiertnicze, w których analizuje się przykładowo powierzchnię stropową badanej warstwy.

Jak więc stwierdzić, czy wierceń „wystarczy”? Są dwie drogi. Pierwsza polega na ocenie rozmiarów podstawowych struktur na mapie tradycyjnej. Gdy najmniejsza struktura na mapie umownie mieści się np. 3 razy w obszarze badań to $M = 4 = (3 + 1)$ i $N = 4 = (3 + 1)$, a ilość wierceń wynosi $M \cdot N = 16$. Druga droga ocenia ilość wierceń w aspekcie statystycznym. Polega ono na wykonaniu aproksymacji powierzchni równaniem I składowej i obliczeniu prawdopodobieństwa jej obecności. Gdy prawdopodobieństwo jest duże, a wierceń jeszcze wystarczy oblicza się I + II składową oraz ich prawdopodobieństwo i tak dalej aż do momentu, gdy albo zabraknie wierceń, albo prawdopodobieństwo stanie się małe, np. poniżej 0,5. Szczegóły dotyczące drugiej drogi oceny zostaną omówione poniżej.

DOBIERANIE WŁAŚCIWEJ POWIERZCHNI TRENDOWEJ
OD STRONY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

Nie biorąc pod uwagę kryteriów geologicznych proponuje się przyjęcie następującego schematu postępowania:

1. Obliczyć skorygowaną sumę kwadratów odchyleń, która będzie miarą zmienności danych wejściowych wg wzoru:

$$W = \sum_{i=1}^n Z_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n Z_i \right)^2 / n \quad [8]$$

gdzie: Z_i — kolejne wartości cechy „z” w wierceniach lub innych punktach badawczych,
 n — ilość punktów badawczych (wierceń itp.).

2. Obliczyć równanie powierzchni odpowiadającej wielomianowi I stopnia lub I harmonicznej składowej trendu (zależnie od przyjętej klasy) i wydrukować realizację tego równania wg zmieniających się x i y na obszarze badań. Obliczone na podstawie odpowiednich równań wielkości cechy z oznacza się Z_{II} .

a. Obliczyć nie skorygowaną sumę kwadratów dla wartości resztkowych $z_{ij} - Z_{II}$ wg wzoru:

$$W_{Ir} = \sum_{i=1}^n (Z_i - Z_{II})^2 \quad [9]$$

W_{Ir} będzie miarą zmienności wartości resztkowych i pośrednio miarą „dopasowania” wielomianu I stopnia lub I harmonicznej składowej trendu do badanej powierzchni.

b. Obliczyć miarę zmienności związanej z wielomianem I stopnia lub z I harmoniczną składową trendu wg wzoru:

$$W_I = W - W_{Ir} \quad [10]$$

c. Ustalić ilość stopni swobody przypadających na W_I i W_{Ir} . Dla W_I ilość ta równa się ilości współczynników w odpowiednich wzorach: na wielomian I stopnia 3, na I harmoniczną 9. Dla W_{Ir} ilość ta dla wielomianu I stopnia wynosi $n - 1 - 3 = n - 4$, dla I harmonicznej $n - 1 - 9 = n - 10$.

d. Obliczyć „średnią” sumę kwadratów dla W_I i W_{Ir} , przypadającą na jeden stopień swobody.

— dla W_I wielkość ta wynosi: w przypadku wielomianu I stopnia: $SKW_I = W_I/3$ [11]

w przypadku I harmonicznej $SKW_I = W_I/9$ [12]

— dla W_{Ir} wielkość tę oblicza się ze wzoru: w przypadku wielomianu I stopnia

$$SKW_{Ir} = W_{Ir}/(n - 4) \quad [13]$$

w przypadku I harmonicznej

$$SKW_{Ir} = W_{Ir}/(n - 10) \quad [14]$$

e. Obliczyć wielkość $F = SKW_I/SKW_{Ir}$ [15]

f. Z tablic rozkładu F — Snedecora ustalić prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy zerowej, że może dla ilości stopni swobody: 3 w przypadku wielomianu I stopnia i 9 w przypadku I harmonicznej oraz $n - 4$ w przypadku wielomianu i $n - 10$ w przypadku I harmonicznej istnieć wartość F większa lub równa od wartości obliczonej. Gdyby taka wartość F istniała oznaczałoby to, że stosunek zmienności przynależnej do wielomianu I stopnia (czy do I harmonicznej składowej trendu) do zmienności wartości resztkowych jest statystycznie nieistotny. Innymi słowy z punktu widzenia statystyki ustala się prawdopodobieństwo nierealności obecności wielomianu I stopnia lub I harmonicznej składowej trendu. Ustalane za pomocą tablic prawdopodobieństwo odejmuje się od 1 i po przemnożeniu przez 100 otrzymuje się poziom ufności w procencie z jakim można przyjąć, że istnieje I harmoniczna trendu. Jeżeli jest spełnione założenie

2 o naturze procesu geologicznego otrzymać się powinno wysoki (ponad 90%) poziom ufności obecności I harmonicznej składowej trendu lub wielomian I stopnia.

3. Sprawdzić, czy jest do przyjęcia aproksymacja wielomianem II stopnia lub II harmoniczną składową trendu.

a. Obliczyć równanie powierzchni wg odpowiednich wzorów, odpowiadające wielomianowi II stopnia lub I + II harmonicznej składowej trendu i wydrukować mapę wg realizacji tej powierzchni. Następnie, oznaczając Z_{II} otrzymane wartości obliczyć nie skorygowaną sumę kwadratów dla wartości resztkowych wg wzoru:

$$W_{IIr} = \sum_{i=1}^n (Z_i - Z_{II})^2 \quad [16]$$

Otrzymany wynik jest miarą zmienności wartości resztkowych powstałych po odjęciu od badanej powierzchni I + II harmonicznej składowej trendu.

b. Obliczyć miarę zmienności przynależną do II harmonicznej składowej trendu (lub wielomianu II stopnia). Jest ona zawarta w zmienności wartości resztkowych powstałych po odjęciu od obliczonej powierzchni, I harmonicznej składowej trendu (lub wielomianu I stopnia) czyli:

$$W_{II} = W - W_{I+IIr} - W_I \quad [17]$$

Ilość stopni swobody dla W_{II} wynosi:

w przypadku wielomianu II stopnia — $6 - 3 = 3$
w przypadku II harmonicznej — $25 - 9 = 16$

Jest ona związana z ilością współczynników w odpowiednich wzorach.

c. Obliczyć miarę zmienności wartości resztkowych powstałych po odjęciu od powierzchni tylko wielomianu II stopnia (lub tylko II harmonicznej składowej trendu) wg wzoru:

$$W_{IIr} = W_{Ir} - W_{II} \quad [18]$$

Ilość stopni swobody dla W_{IIr} wynosi:

w przypadku wielomianu $n - 7$
w przypadku szeregu Fouriera $n - 26$

d. Obliczyć „średnią” sumę kwadratów dla W_{II} i W_{IIr} przypadającą na 1 stopień swobody wg wzorów:

$$SKW_{II} = W_{II/3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{dla wielomianu} \\ \text{SKW}_{IIr} = W_{IIr/(n-7)} \end{array} \right\} \quad [19]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SKW}_{II} = W_{II/16} \\ \text{SKW}_{IIr} = W_{IIr/(n-26)} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{dla szeregów} \\ \text{Fouriera} \end{array} \quad [21]$$

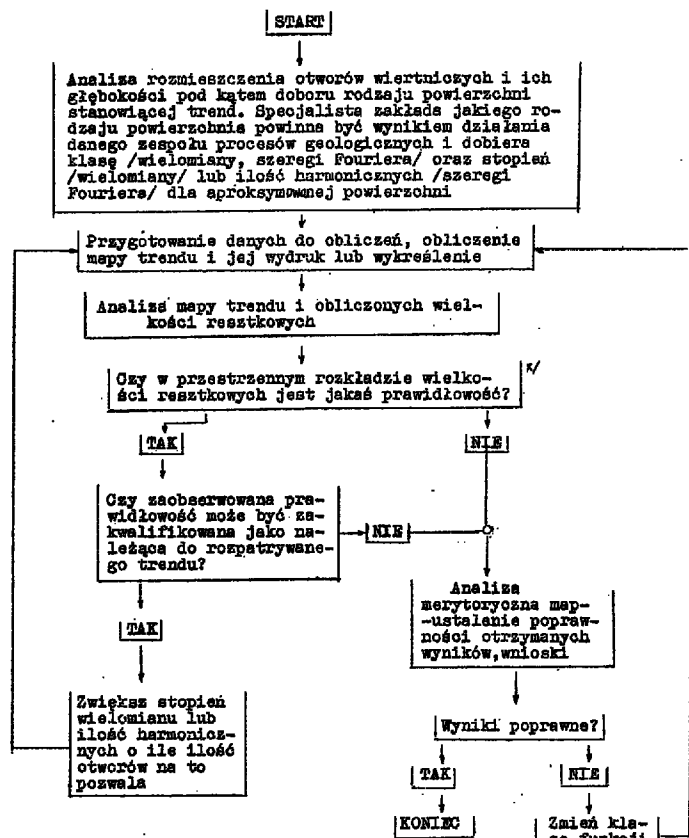
$$\left. \begin{array}{l} \text{SKW}_{II} = W_{II/16} \\ \text{SKW}_{IIr} = W_{IIr/(n-26)} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{dla szeregów} \\ \text{Fouriera} \end{array} \quad [22]$$

oraz wielkość F wg wzoru:

$$F = SKW_{II}/SKW_{IIr} \quad [23]$$

e. Wykonać czynności wymienione w punkcie f. w wyniku czego otrzyma się w procencie poziom ufności z jakim można przyjąć, że istnieje wielomian I stopnia (lub II harmoniczna składowa trendu). Poziom ten będzie niższy od poziomu ufności ustalonego dla wielomianu I stopnia (lub I harmonicznej). Gdy ocenia się, że jest on jednak jeszcze za wysoki, np. 90% to można sprawdzać obecność wielomianu III i dalszych stopni (czy III i dalszych harmonicznych).

Przedstawiony wyżej schemat postępowania przy doborze „właściwej” powierzchni trendu, oparty na badaniu stosunku miar zmienności kolejnych po-



x/ Ustalenie prawidłowości w przestrzennym obrazie "resztek" dokonać można albo przy pomocy wykonania ręcznego szeregu przekrojów przez teren badań, albo też badając w opisanym w artykule sposób "moc" trendu. Wykonując przekroje, należy na nich nanosić wielkości resztkowe i analizować pod kątem obecności prawidłowości np. cyklicznych w otrzymanym obrazie.

Ryc. 5. Schemat czynności (decyzji) przy opracowywaniu danych geologicznych rozmieszczonych na powierzchni.

Fig. 5. Scheme of operations (decisions) in the course of preparation of geological data distributed on a surface.

wierzchni daje możliwość ustalenia, które z powierzchni trendowych odzwierciedla zmienność cechy „z” na badanym obszarze w stopniu dostatecznym i stanowi pewne uzupełnienie rozważań merytorycznych. Należy tu wyraźnie podkreślić, że dobieranie „właściwej” powierzchni trendowej jedynie drogą analizy zmienności statystycznej jest niewłaściwe i pracochłonne w skutkach, gdyż sposób ten nie zabezpiecza przed pozostawieniem w residuum fluktuacji mających charakter systematyczny.

Sposób wykonania pełnej wstępnej analizy merytorycznej i statystycznej zależy od konkretnej sytuacji geologicznej i trudno jest podać szczegółową „receptę” na jej wykonanie. Sprawdzeniem poprawnego doboru klasy i postaci funkcji jest obraz uzyskany na mapie powierzchni trendowych, a przede wszystkim na mapie pozostałości. O ile analiza przekroju prostopadłego do struktury na mapie pozostałości sugeruje jeszcze pewną prawidłowość oznacza to, że czynnik losowy nie został całkowicie oddzielony. Pewien przepis, w sensie przebiegu procesu wykonania całości analizy, przedstawiono na ryc. 5. Rozpatrzmy krok po kroku czynności wykonywane przez geologa lub przez matematyka, a składające się na proces analizy map za pomocą techniki trendu.

Etap wstępny analizy polega na doborze klasy funkcji matematycznej do obliczenia mapy trendu. Postępowanie specjalisty uwzględniać tu powinno kształt powierzchni trendowej. Jeżeli ma to być płaszczyna, powierzchnią trendu będzie płaszczyna, gdy

spodziewamy się powierzchni synklinalnej lub antyklinalnej — powierzchnią będzie paraboloida czyli powierzchnia II stopnia, gdy powierzchnia ma bardziej skomplikowany kształt, ale zmiany kształtu nie mają charakteru okresowego należy jako powierzchnię trendowej używać powierzchni, których równanie opisują wielomiany III lub wyższych stopni.

W końcu, gdy zmiany kształtu powierzchni mają charakter cykliczny lub zbliżony do cyklicznego używać należy wielomianów trygonometrycznych czyli szeregów Fouriera. Na tym etapie rozmówienia pewnym problemem jest podjęcie decyzji o stopniu wielomianu potęgowego lub ilości harmonicznych w szeregach Fouriera, używanych do aproksymacji. W poprzednich częściach artykułu opisano szczegółowo statystyczne podejście do wyboru tzw. „właściwej” powierzchni trendowej. Zreasumujemy więc warunki jakim ma odpowiadać „właściwa” powierzchnia trendowa:

1) jest ona wielomianem potęgowym o stopniu n , który spełnia warunek matematyczny $(n + 1) / (n + 2) \geq 1/2 \leq (m + 1)$, gdzie m — ilość wierceń oraz warunek geologiczny, że kształt powierzchni reprezentowanej przez wielomian jest podobny do kształtu powierzchni geologicznej, utożsamianej z trendem. Jak widać, z powyższych warunków wynika, że dla aproksymacji wielomianem II stopnia potrzeba jest co najmniej 6 wierceń, rozmieszczonych równomiernie na obszarze badań) ilość wierceń musi być \geq od ilości współczynników (A, B, \dots, w) w wzorach na ryc. 2). W tym miejscu ważna jest uwaga, że powiększenie stopnia wielomianu nie zawsze prowadzi do polepszenia aproksymacji w sensie „dopasowania” powierzchni matematycznej do geologicznej. Tak więc, gdy obszar jest rozpoznany 50 wierceniemi najwyższy z punktu widzenia matematyki, możliwy do przyjęcia stopień wielomianu aproksymującego wynosi 8, ale gdy z geologicznego punktu widzenia ocenia się, że wystarcza wielomian II stopnia, bo powierzchnia jest antyklinalna to należy aproksymować wielomianem II stopnia, uwzględniając dane z wszystkich 50 wierceń.

2) jest ona szeregiem Fouriera o ilości współczynników równej $M \cdot N$ (pojęcia M i N były określone poprzednio). Ilość wierceń jest $\geq M \cdot N$. Używając szeregów Fouriera należy mieć na uwadze fakt, że przy powiększaniu M i N rozpatruje się zmiany okresowe powierzchni o coraz mniejszych wymiarach przestrzennych. Geolog powinien zdawać sobie sprawę z niebezpieczeństwa powstania błędów, jakie może być spowodowane faktem nadmiernej „rozdrobnienia” powierzchni. Jeżeli słuszne jest założenie przytaczane na wstępie, że proces (lub procesy) główny spowodował cykliczne zmiany kształtu powierzchni, a procesy późniejsze są „odpowiedzialne” tylko za losowe zmiany kształtu powierzchni, to należy doprowadzić do tego by wartości resztkowe miały charakter losowy (metodami opisanymi powyżej). Jeśli podejrzewa się, że późniejsze procesy mogły spowodować uporządkowane zmiany kształtu powierzchni, należy przeprowadzić aproksymację tylko na podstawie generalnych długości cykli w zmianie kształtu powierzchni geologicznej wzdłuż obu osi x i y . Powyższe stwierdzenie znaczy tyle, że w tym przypadku „bezpieczniej” jest otrzymać obraz zgeneralizowany niż „dokładny”, ale wątpliwy z punktu widzenia genezy powstania powierzchni.

Po podjęciu decyzji o rodzaju funkcji aproksymującej i o jej stopniu należy zgodnie z diagramem czynności zamieszczonym na rys. 5 przygotować dane do obliczeń map trendu przy pomocy e.m.c. Zostanie opisany proces przygotowania tych danych dla istniejących programów obliczeń oraz naszkicowana matematyczna część problemu aproksymacji. Ten ostatni opis zamieszcza się dla zorientowania czytelnika w sposobie matematycznego podejścia do aproksymacji, ale tylko jego skrótem.

Programy obliczeń map trendu zostały opracowane w Zakładzie Metod Matematycznych PPG na zlecenie Instytutu Geologicznego i Instytutu Hydrogeologii i Geologii Inżynierskiej UW (6), a następnie

zmodyfikowane w ramach prac nad problemem węzłowym 06.1.1. (8). Programy aktualnie w wersji pierwotnej są w posiadaniu Ośrodka Obliczeniowego PPG i są napisane w języku Algol 1204 na e.m.c. Odra 1204, w wersji zmodyfikowanej są w posiadaniu Instytutu Hydrogeologii i Geologii Inżynierskiej UW i są napisane w języku GIER-ALGOL IV na e.m.c. GIER. Ponieważ kolejność przygotowania danych i ich sposób zapisu na taśmie perforowanej różnią się w obu wersjach programów w artykule podajemy te dane, które należy przygotować, sprawę zaś kolejności pozostawiając do wyjaśnienia w trakcie realizacji obliczeń.

Zestaw danych dla wielomianowej wersji map trendu zawiera: tekst objaśniający (tytuł, nagłówek), ilość odwiertów, maksymalny żądany stopień wielomianu, zmienna sterująca — k (0 — gdy następuje porównanie zestawu danych z określonego obszaru z wielomianem o założonych współczynnikach β_{00} , β_{01} itd., dowolna liczba całkowita, gdy wylicza się wartości β_{00} , β_{01} itd. na podstawie danych z wierceń), macierz o wymiarach (ilość wierszy = ilość wierceń; ilość kolumn równa się 3 — pierwsza kolumna to współrzędne X otworów, druga to współrzędne Y , trzecia to wartości głębokości zalegania aproksymowanej powierzchni), gdy $K=0$ to macierz współczynników wielomianu zadanych a priori, dowolne teksty (nazwy wierceń), w nawiasach okrągłych (o stałej 11 znaków drukarskich długości opisu). Tekstów tych musi być tyle ile wierceń, a napisane mają być w tej kolejności w jakiej podano współrzędne wierceń.

W wersji fourierowskiej map trendu dane mają następującą postać: dowolny tekst nagłówek, ilość odwiertów, M , N (wyjaśnione powyżej), maksymalna wartość współrzędnej X , maksymalna wartość współrzędnej Y , macierz współrzędnych otworów analogiczna jak w programie poprzednim, dowolne teksty (nazwy otworów) — jak w programie poprzednim.

Jak widać dane te są oczywiste, a jedynym problemem wymagającym objaśnienia jest sprawa współrzędnych X , Y . Z dotychczasowych doświadczeń stosowania analizy map za pomocą techniki trendu wynika, że optymalnym rozwiązaniem jest przyjmowanie sztucznego, płaskiego układu X , Y dla analizowanego obszaru. Osie układu X i Y korzystnie jest orientować prostopadle do osi głównych struktur obserwowanych na obszarze badań.

Dane wprowadzone do e.m.c. są przetworzone przez program, w wyniku czego zostają obliczone współczynniki wielomianu aproksymującego (lub szeregu Fouriera) oraz wydrukowany zestaw następujących wyników:

nagłówek, współczynniki wielomianu,

nazwa otworu 1	X_1	Y_1	Z_1	$Z_{obl.}$	$Z_1 - Z_{obl.}$	% błędu
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
nazwa otworu m-tego	X_m	Y_m	Z_m	$Z_{obl.}$	$Z_m - Z_{obl.}$	% błędu

średnia arytmetyczna Z

średnia arytmetyczna $Z_{obl.}$

średnia arytmetyczna $Z - Z_{obl.}$

średni błąd procentowy odchyłek $Z - Z_{obl.}$

Wstępnie, można ocenić, że aproksymacja jest prawidłowa, gdy średnia arytmetyczna $z =$ średniej arytmetycznej $Z_{obl.}$ oraz, gdy średni błąd procentowy odchyłek $Z - Z_{obl.}$ jest rzędu do 10%/o. Dokładniej należy analizować aproksymację, rozpatrując kolejno wartości $Z - Z_{obl.}$ w poszczególnych wierceniach i śledząc w ten sposób dopasowanie powierzchni geologicznej do powierzchni trendu. Niejednokrotnie na kilku otworach otrzymuje się krańcowo odbiegające od pozostałych wartości $Z - Z_{obl.}$, co powinno być wyjaśnione od strony geologicznej poprawności wyni-

ków. Zagadnienie to szerzej zostanie omówione w dalszej części artykułu. Dla wyjaśnienia procesu obliczeniowego podaje się teraz schematyczny opis samej procedury aproksymacji, na przykładzie płaszczyny jako powierzchni najprostszej.

Równanie płaszczyny zgodnie z ryc. 2 ma postać:

$$Z_{trend} = \beta_{00} + \beta_{10}x + \beta_{01}y \quad [24]$$

— współczynniki β_{00} , β_{10} i β_{01} są nieznanne i mają być obliczone, a ich wartości muszą być takie, aby suma kwadratów odchyłek pomiędzy Z a $Z_{obl.}$ była minimalna;

— równanie odchyłki jest:

$$\text{odchyłka} = Z - \beta_{00} - \beta_{10}x - \beta_{01}y \quad [25]$$

— suma kwadratów odchyłek oznaczona jako funkcja F (β_{00} , β_{10} , β_{01}) współczynników ma postać:

$$F = \sum_{i=1}^m (Z_i - \beta_{00} - \beta_{10}x_i - \beta_{01}y_i)^2 \quad [26]$$

$i = 1 \dots m$

gdzie: m — ilość wierceń

Z_i , X_i , Y_i — współrzędne i -tego wiercenia

Jeżeli F ma być zminimalizowane to spełniony musi być warunek:

$$\frac{\delta F}{\delta \beta_{00}} = \frac{\delta F}{\delta \beta_{10}} = \frac{\delta F}{\delta \beta_{01}} = 0 \quad [27]$$

Rozpiszmy równania na pochodne cząstkowe:

$$\frac{\delta F}{\delta \beta_{00}} = \sum_{i=1}^m 2(Z_i - \beta_{00} - \beta_{10}x_i - \beta_{01}y_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta \beta_{10}} = \sum_{i=1}^m 2(Z_i - \beta_{00} - \beta_{10}x_i - \beta_{01}y_i)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta \beta_{01}} = \sum_{i=1}^m 2(Z_i - \beta_{00} - \beta_{10}x_i - \beta_{01}y_i)(-y_i) = 0 \quad [28]$$

Po przemnożeniu i zsumowaniu wyrazów szeregowo otrzymuje się trzy równania o postaci (indeksy zostaną opuszczone):

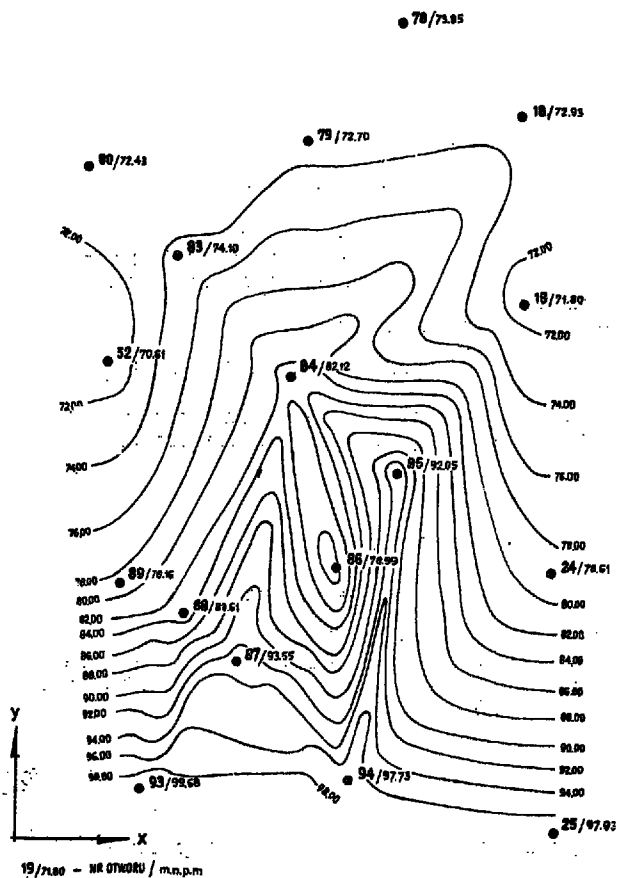
$$-\sum_{i=1}^m Z + \beta_{00} \cdot m + \beta_{10} \sum_{i=1}^m x + \beta_{01} \sum_{i=1}^m y = 0$$

$$-\sum_{i=1}^m Zx + \beta_{00} \sum_{i=1}^m x + \beta_{10} \sum_{i=1}^m x^2 + \beta_{01} \sum_{i=1}^m xy = 0$$

$$-\sum_{i=1}^m Zy + \beta_{00} \sum_{i=1}^m y + \beta_{10} \sum_{i=1}^m xy + \beta_{01} \sum_{i=1}^m y^2 = 0 \quad [29]$$

Jeżeli rozwiązanie tych trzech równań istnieje (ze względu na niewiadome β_{00} , β_{01} i β_{10}) to można zastosować standardowe metody rozwiązywania równań liniowych (w programach jest to realizowane za pomocą procedury det-Gauss, realizującej rozwiązanie układu równań liniowych poprzez eliminację największego współczynnika). W postaci macierzowej rozwiązanie układu równań [29] przedstawia się następująco:

$$\begin{bmatrix} \beta_{00} \\ \beta_{10} \\ \beta_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum xy \\ \sum y & \sum xy & \sum y^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Z \\ \sum Zx \\ \sum Zy \end{bmatrix} \quad [30]$$



Ryc. 6.
Fig. 6.

Po rozwiązaniu układu równań [30] współczynniki β_{00} , β_{10} i β_{01} posiadają takie wartości, że suma kwadratów odchyłek $Z-Z_{obl.}$ jest minimum. Czy oznacza to, że rozwiązanie musi nas satysfakcjonować? Niestety tylko strona matematyczna jest tu spełniona, od strony geologicznej mogą tu być istotne zastrzeżenia, których obecność zależy od konkretnego, obliczanego przypadku.

Dla ilustracji przytoczonych powyżej wywodów zamieszcza się bardzo prosty, hipotetyczny przykład doboru powierzchni trendowej. Materiał wyjściowy stanowi tu 17 wierceń, które są rozmieszczone na powierzchni (ryc. 6), w sposób nieregularny. Obrano układ współrzędnych płaskich x, y i każde wiercenie opisane jest trójką liczb: x, y, z . Zgodnie ze schematem czynności zamieszczonym na ryc. 5 należy, analizując mapę zamieszczoną na ryc. 6, wybrać klasę funkcji dla powierzchni trendowej. W naszym przypadku decydujemy się na szereg Fouriera — I harmoniczną. Decyzja ta wynika z faktu, że widoczne są fluktuacje powierzchni „z”, co przesądza o wyborze szeregów Fouriera jako funkcji aproksymującej. Ilość wierceń — 17 pozwala na start do aproksymacji z I harmonicznej, gdyż wtedy konieczna ilość wierceń wynosi 9. Po wykonaniu obliczeń otrzymano wyniki z maszyny cyfrowej w postaci wydruku (tab.), a wydrukowana mapa jest zamieszczona na ryc. 7.

Czy mapa ta oddaje we właściwy sposób trend? Sprawdźmy to wg wzorów: 8, 9, 10, 12, 14 i 15

$$W \approx 115649 - 113816 \approx 1833$$

$$W_I \approx 201$$

$$SKW_I = 181$$

$$SKW_{IR} \approx 29$$

$$F \approx 6.24$$



Ryc. 7. Mapa testowa I harmoniczna.

A < 68,45 mn pm, H 68,45—70,61, 9 — 70,61—71,77, E 71,77—73,93, 2 — 73,93—74,10, C — 74,10—75,26, 7 — 75,26—76,42, B 76,42—77,58, 4 — 77,58—78,65, F 78,65—79,82, O — 79,82—80,98, I 80,98—82,15, 8 — 82,15—83,31, > 83,31—84,47, x 84,47—85,63, D 85,63—86,80, 3 — 86,80—87,96, U 87,96—89,12, — 89,12—90,28, — 90,28—91,44, — 91,44—92,60, Y 92,60—93,76, G 93,76—94,92, J 94,92—96,08, 6 96,08—97,24, W > 97,24.

Fig. 7. First test harmonic map.

Według tablic Fishera dla stopni swobody 7 i 9 (patrz punkt f) istnieje prawdopodobieństwo nierealności obliczonej powierzchni równe ok. 0.01, co oznacza, że na poziomie ok. 99% ufności można przyjąć za prawdę, że istnieje I harmoniczna składowa trendu. Wynik ten w zasadzie przesądza dalsze rozumowanie, gdyż nie wydaje się by była potrzeba dobierania dokładniejszych powierzchni trendowych. Pomimo statystycznie ustalonej prawidłowości w doborze powierzchni trendowej, należy zawsze zweryfikować jej prawidłowość od strony geologicznej.

WNIOSKI

Zastosowanie powierzchni trendowych oraz elektronicznej maszyny cyfrowej do konstruowania, analizy i interpretacji map geologicznych pozwala — poprzez uwzględnienie jednocześnie wszystkich punktów badawczych (wykorzystanie pamięci maszyny, która dla odzworowania ujmuje wszystkie jednocześnie punkty obserwacyjne stanowiąc w tym przypadku wyższość nad człowiekiem) na obiektywne ustalenie historii tworzenia się badanej powierzchni obserwowanej in status nascendi.

WSPÓŁCZYNNIKI RÓWNIANIA TRENDU WZÓR [8]

+5.099940 · 10⁺³, +4.026693 · 10⁺³, +4.058171 · 10⁺³, +3.275229 · 10⁺³,
 +3.017050 · 10⁺³, +2.455782 · 10⁺³, +3.259036 · 10⁺³, 2.594758 · 10⁺³,
 +1.941740 · 10⁺³,

Nr otw.	X	Y	Z	Z ₁	Z-Z ₁	Proc.
18	419	846	72.93	+75.2486	-2.3186	+3.0812
19	420	811	71.90	+70.8183	+1.0817	+1.5275
24	424	759	78.61	+78.4967	+0.1133	+0.1443
25	425	724	97.93	+98.8111	-0.8811	+0.8917
78	397	864	73.95	+71.6857	+2.2643	+3.1586
79	379	842	72.70	+74.6116	-1.9116	+2.5620
80	340	839	72.40	+73.6775	-1.2775	+1.7339
82	342	802	70.61	+67.4501	+3.1599	+4.6848
83	355	821	74.10	+74.0124	+0.0876	+0.1184
84	377	798	82.12	+82.3570	-0.2370	+0.2878
85	395	779	92.05	+85.0327	+7.0173	+8.2525
86	384	762	78.99	+98.0072	-10.0172	+11.2544
87	366	746	93.55	+90.0913	+3.4587	+3.8391
88	357	754	83.61	+85.7903	-2.1803	+2.5414
89	345	760	78.16	+78.4733	-0.3133	+0.3993
93	347	720	99.68	+100.2567	-0.5767	+0.5752
94	385	722	97.73	+95.2018	+2.5282	+2.6556
Śr. Z	Sr. Z ₁	Śr. bl.	Śr. bl. proc.			
81.8247	81.8248	2.3191	2.8063			

x, y, z — współrzędne otworów wiertniczych
 Z — poziom zalegania w poszczególnych otworach wiertniczych w m npm
 Śr. Z, Śr. Z₁ — średnia arytmetyczna
 Śr. bl. — średni błąd

Na podstawie rozważań, dotyczących zaproponowanych i wytestowanych już do aproksymacji powierzchni modeli: wielomianów potęgowych oraz podwójnych szeregów Fouriera można zdefiniować następujące wnioski:

1. Zastosowanie jednej z wymienionych metod wymaga obecności powierzchni ciągłych na badanym obszarze. Gdy na obszarze badań występuje powierzchnia nieciągła należy aproksymację i analizę wykonywać oddzielnie dla podobszarów, dla których można założyć ciągłość badanej powierzchni, a ilość punktów obserwacyjnych uprawnia do takiego podziału.

2. Zaproponowany sposób postępowania pozwala na elastyczną analizę danych, gdyż w dowolnym etapie opracowania matematycznego istnieje możliwość wykonywania analiz merytorycznych.

LITERATURA

1. Colocquium on trend analysis — Computer application in the earth sciences. University of Kansas. Kansas Computer Contribution 12, 1967.
2. Harbaugh J. W. — A computer method for four-variable trend analysis illustrated by a study of oil-gravity variations in Southeastern Kansas. University of Kansas Lawrence. Kansas, 1964.

SUMMARY

The general linear model is the connecting thread that weaves through many aspects of map preparation, map analysis, and map interpretation. In its two-dimensional form the general linear model is the basis for the polynomial and Fourier map — analysis models, both of which are widely used in a variety of geological fields.

This article briefly describes the approach offered by trend analysis in fitting a mathematical surface to the data by the method of least squares. This surface is then considered to be an estimate of the regional component of variance (of trend). The deviations of the observed data from the trend, called residuals, reflect local variation, local component plus the noise, and are in general random.

3. James W. R. — Fortran IV program using double Fourier series for surface fitting of irregularly spaced data. University of Kansas. Kansas Computer Contribution 5, 1966.
4. Krumbein W. C., Graybill F. A. — An introduction to statistical models in geology. Mc Graw-Hill Book Company. New York, 1965.
5. O'Leary M., Lippert R. H., Spitz O. T. — Fortran IV and map program for computation and plotting of trend surfaces for degrees 1 through 6. University of Kansas. Kansas Computer Contribution 3, 1966.
6. Stenzel P., Szmajsler H. — Zastosowanie metod matematycznych w geofizyce. Prace postępu technicznego, PPG, 1970.
7. Wiatr I. — Model statystyczny wybranych cech środowiska inżyniersko-geologicznego kopalnych dolin Przykony i Małgorzaty w okolicy Turka. Biul. geol. UW, 1971, nr 15.
8. Wiatr I., Stenzel P., Kowalski A. — Metodyka zastosowania podwójnych wielomianów trygonometrycznych do analizy map geologicznych. Praca wykonana w Instytucie Hydrogeologii i Geologii Inżynierskiej UW w ramach problemu węzłowego 06.1.1., 1971.

РЕЗЮМЕ

Общая линейная модель является реперным функциональным уравнением, которое находит применение при анализах и интерпретации карт для разных целей. В своем двумерном виде общая линейная модель является основой полиномиальных и фурьеровских моделей анализа карт. Обе модели широко применяются в разных отраслях геологии. Статья дает краткое описание способа подхода путем анализа дисперсии к приспособлению математической поверхности для измерений методом наименьших квадратов. Эта поверхность анализируется потом в отношении оценки регионального компонента дисперсии. Отклонения наблюдаемых замеров от общей дисперсии, называемые остатками, отражают местные особенности, местные компоненты и внутренние вариации и представляют, по существу, стихийные величины.