JACEK OWCZARCZYK
Instytut Geologiczny

METODY OKREŚLANIA POWIERZCHNI Z POMOCNICZĄ SIATKĄ KWADRATOWĄ

UKD 550.8:528.9(084.3-33)(084.21):681.3

Celem artykułu jest przedstawienie możliwości określania powierzchni będącej obrazem ciągłej funkcji dwóch zmiennych na podstawie zbioru jej wartości nierównomiernie położonych punktach pomiarowych. Opisane w artykule metody mogą być zrealizowane za pomocą e m c.

Skoncentrowałem się na metodach określania powierzchni z pomocniczą siatką kwadratową. W metodach tych powierzchnia jest reprezentowana przez macierz wartości, istnieją zatem możliwości:

— przechowywania powierzchni jako tablicy liczb z prostą operacją korygowania wartości (elementów tablicy) w przypadku nowych punktów danych (w innych metodach określania powierzchni obliczenia należy powtórzyć od początku);

— otrzymywania nowych powierzchni będących wynikiem operacji arytmetycznych na kilku wcześniej obliczonych powierzchniach w przypadku, gdy te powierzchnie zostały obliczone dla różnych zbiorów punktów położonych na badanym obszarze;

— kontroli poprawności otrzymanych wyników w przypadku obliczania kolejnych powierzchni z tego samego zbioru punktów (przy założeniu ciągłości funkcji powierzchnie nie powinny się przecinać);

— automatycznego (za pomocą plottera) kreślenia map konturowych obliczonych powierzchni na badanym obszarze lub części tego obszaru;

— automatycznego kreślenia diagramów blokowych i przekrojów obliczonych powierzchni.

SIATKA PODSTAWOWA

Niech $\{(x_i, y_i)\}$ $(i = 1,2 \ldots N)$ będzie danym zbiorem punktów na płaszczyźnie Oxy w prostokątnym układzie współrzędnych $Oxyz$. Przez G oznaczać będziemy wielokąt wypukły, jaki można opisać na zewnętrznych punktach zbioru $(x_i, y_i) : i = 1, 2,..., N$. Każdy dany punkt (x_i, y_i) leży wewnątrz lub na brzegu wielokąta G. Zakładamy, że w wielokącie G (i na brzegu tego wielokąta) istnieje ciągła funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$, przy czym dane są wartości tej funkcji w punktach (x_i, y_i) $i = 1, 2,..., N$. Niech

$$z_i = f(x_i, y_i) \qquad i = 1,2,...N \tag{1}$$

Zakładać będziemy również, że wyrażenie analityczne funkcji $f(x, y)$ nie jest dane.

Rozważania przeprowadzimy w prostokącie $P = (x_{min}, x_{max} : y_{min}, y_{max})$, który zawiera wielokąt G. Takie założenie jest pomocne ze względów programowych. Należy jednak zaznaczyć, że chociaż niektóre metody umożliwiają określenie przybliżonych wartości funkcji $f(x, y)$ w każdym punkcie prostokąta P, to wartości w punktach położonych poza wielokątem G mogą być pozbawione sensu.

W prostokącie P określamy siatkę kwadratową którą dalej nazywać będziemy siatką podstawową (ryc. 1). Dowolny węzeł siatki podstawowej (s, t) jest zlokalizowany przez parę współrzędnych (x_s, y_t), gdzie

$$\begin{aligned} x_s &= x_{min} + sh \quad s = 0,1,..., \left[\frac{x_{max} - x_{min}}{h}\right] \\ y_t &= y_{min} + th \quad t = 0,1,..., \left[\frac{y_{max} - y_{min}}{h}\right] \end{aligned} \tag{2}$$

h oznacza rozmiar siatki podstawowej.

Wybór prawidłowego rozmiaru siatki podstawowej jest zagadnieniem trudnym i uzależniony jest od ilości i sposobu rozmieszczenia punktów danych. Z doświadczeń wynika, że rozmiar siatki podstawowej h powinien spełniać nierówność

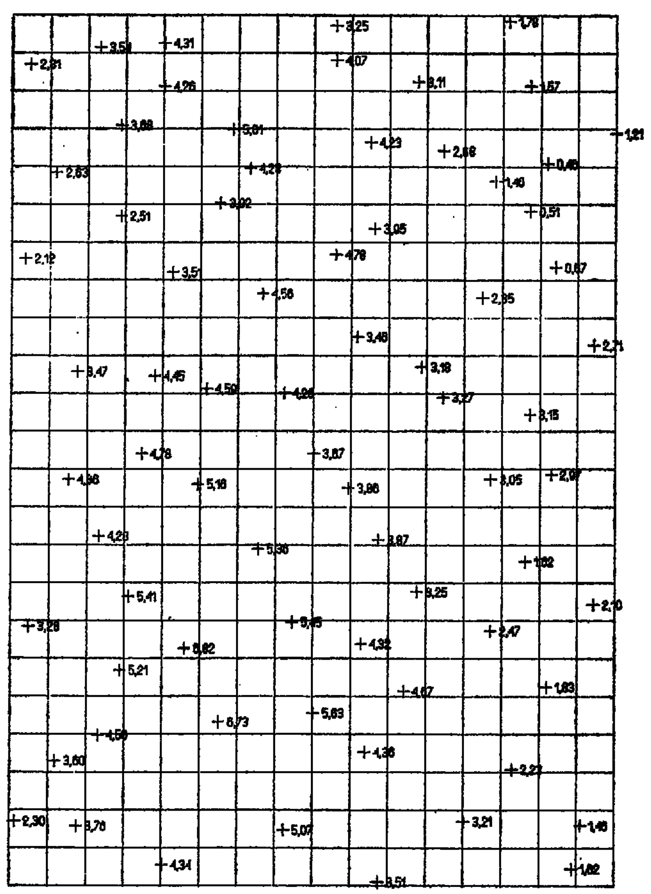
$$\frac{d}{4} < h \leqslant \frac{d}{2} \tag{3}$$

gdzie $d = \sqrt{\frac{(x_{max} - x_{min})(y_{max} - y_{min})}{N}}$, a N oznacza ilość punktów danych.

W dalszej części opracowania zostaną opisane metody obliczania przybliżonych wartości funkcji $f(x, y)$ w węzłach siatki podstawowej.

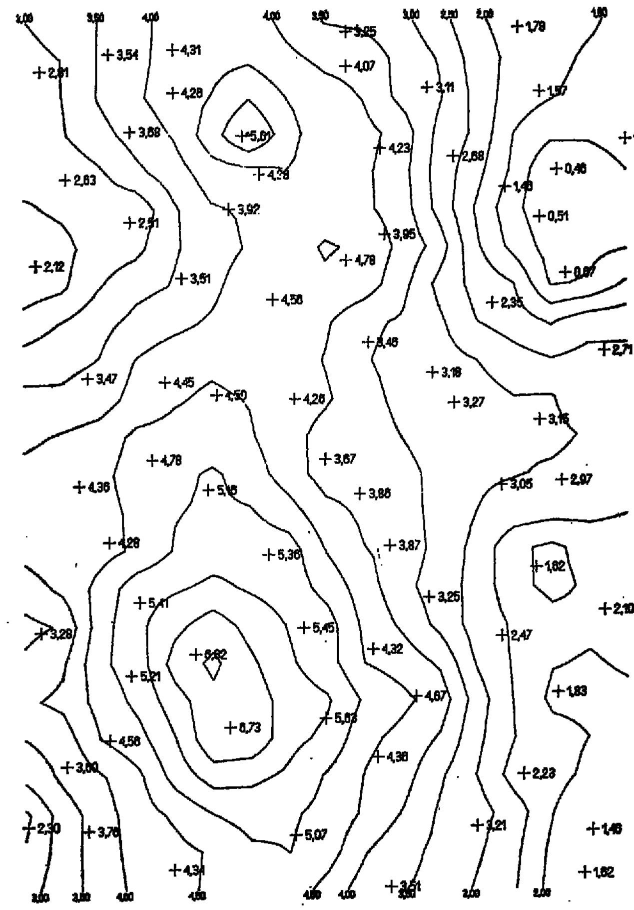
METODA ŚREDNIEJ WAŻONEJ

Niech (s, t) będzie dowolnym węzłem siatki podstawowej leżącym wewnątrz lub na brzegu wielokąta G, w którym chcemy obliczyć przybliżoną wartość



Ryc. 1. Testowy zbiór punktów i siatka podstawowa.

Fig. 1. Test data and square grid.



Ryc. 2. Mapa konturowa powierzchni otrzymanej metodą średniej ważonej (k = 2).

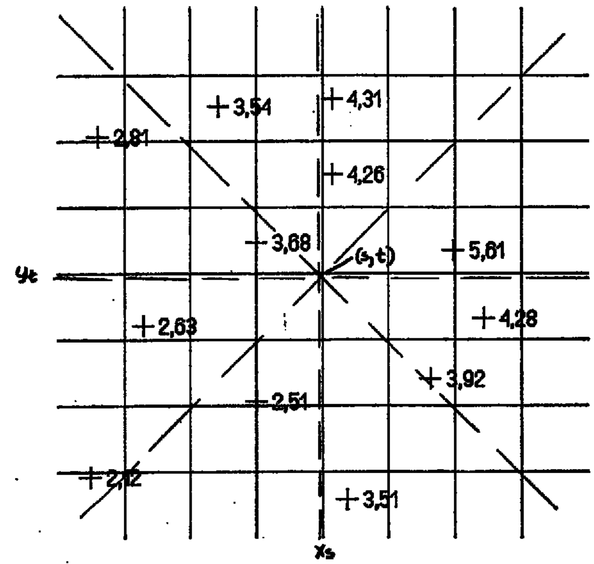
Fig. 2. Contour map of surface obtained by weighted average method (k = 2).

funkcji $f(x, y)$. Oczywiście, jeżeli węzeł (s, t) pokrywa się z pewnym punktem danym (x_k, y_k), to wartość w tym węźle jest równa z_k. Możemy założyć, że wartość funkcji w węźle (s, t) nie różni się znacznie od wartości funkcji w punktach danych położonych dostatecznie blisko węzła (s, t). Naturalnie im bliżej leżą te punkty tym mniejszy błąd popełniamy przyjmując takie założenie. Ze względu na różną odległość punktów danych od węzła (s, t) przyjęcie średniej wartości z tych punktów jako przybliżoną wartość funkcji byłoby nieuzasadnione. Stąd wynika konieczność obliczania przybliżonej wartości funkcji za pomocą średniej ważonej:

$$F(x_s, y_t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} w(x_i, y_i) z_i}{\sum_{i=1}^{N} w(x_i, y_i)} \qquad [4]$$

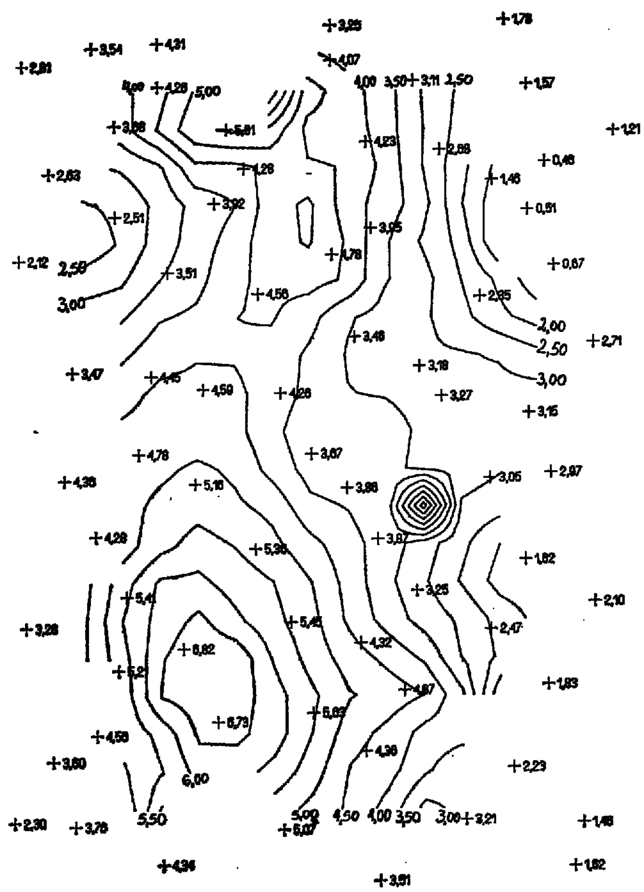
Funkcja wagowa $w(x, y)$ musi być określona w taki sposób, aby punkty leżące bliżej węzła miały większą wagę, a poza tym musi eliminować z obliczeń punkty znacznie oddalone od węzła (s, t). Najczęściej w obliczeniach uwzględniane są punkty oddalone od węzła nie dalej niż R; wartość R można wyznaczyć badając ogólną tendencję zmian za pomocą aproksymacji średniokwadratowej. A zatem funkcję wagową zdefiniujemy w następujący sposób:

$$w(x, y) = \begin{cases} D^{\frac{1}{k}}, \quad k \geqslant 1 & \text{jeżeli } D \leqslant R \\ 0 & \text{jeżeli } D > R \end{cases} \qquad [5]$$



Ryc. 3. Sektory (linie przerywane) w metodzie aproksymacji wielomianem 2 stopnia.

Fig. 3. Octants (broken lines) in the method of second degree polynomial approximation.



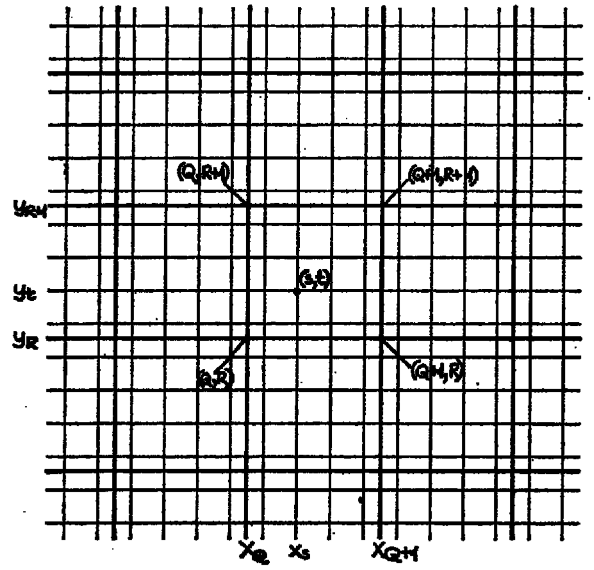
Ryc. 4. Mapa konturowa powierzchni otrzymanej metodą aproksymacji wielomianem 2 stopnia.

Fig. 4. Contour map of surface obtained by second degree polynomial approximation method.

gdzie

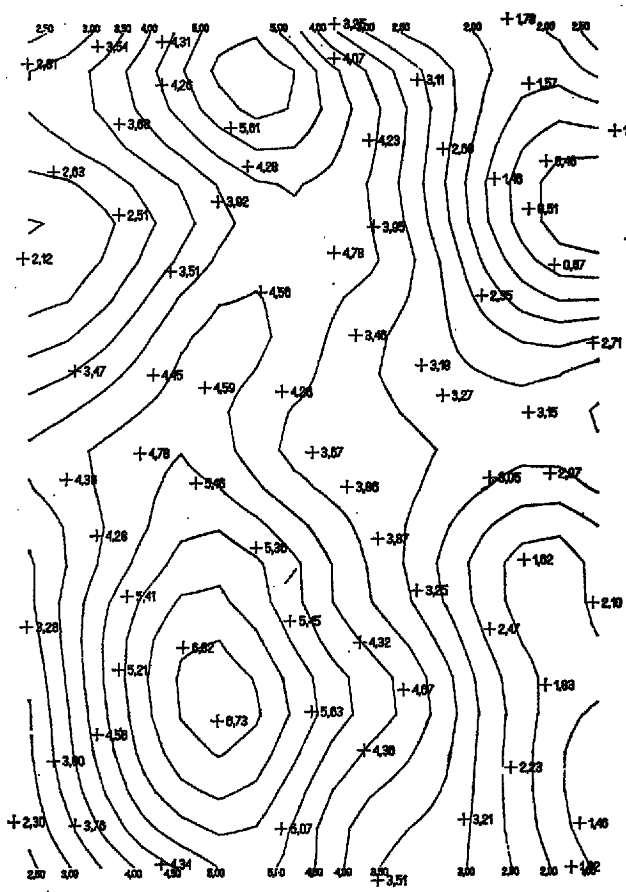
$$D = \sqrt{(x_s - x)^2 + (y_t - y)^2}$$

Z doświadczeń wynika, że przy tej metodzie dla k = 2.



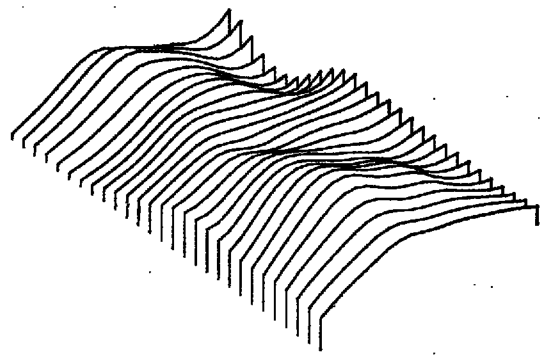
Ryc. 5. Siatka podstawowa (linie cienkie) i siatka dodatkowa (linie grube) w metodzie aproksymacji w siatce dodatkowej.

Fig. 5. Square grid (thin lines) and extra grid (thick lines) in the method of approximation in extra grid.



Ryc. 6. Mapa konturowa powierzchni otrzymanej metodą aproksymacji w siatce dodatkowej.

Fig. 6. Contour map of surface obtained by the method of approximation in extra grid.



Ryc. 7. Diagram blokowy powierzchni otrzymanej metodą aproksymacji w siatce dodatkowej.

Fig. 7. Block diagram of surface obtained by the method of approximation in extra grid.

Podstawową wadą metody średniej ważonej jest to (co łatwo wywnioskować z wzoru 4), że obliczona wartość funkcji jest nie większa i nie mniejsza od odpowiednio największej i najmniejszej wartości uwzględnionej w obliczeniach. Ten fakt uniemożliwia wykrycie ekstremalnych wartości szukanej funkcji.

METODA APROKSYMACJI WIELOMIANEM 2 STOPNIA

Niech (s, t) będzie węzłem siatki podstawowej, w którym chcemy określić przybliżoną wartość funkcji $f(x, y)$. Płaszczyznę wokół węzła dzielimy na osiem sektorów i z każdego sektora wybieramy punkt dany leżący najbliżej węzła (ryc. 3). Następnym etapem jest obliczenie wartości funkcji wagowej w tych punktach, przy czym funkcja wagowa jest określona podobnie jak w metodzie średniej ważonej. Na wybranych z sektorów punktach za pomocą ważonej metody najmniejszych kwadratów obliczamy współczynniki wielomianu 2 stopnia. Wartość tego wielomianu w punkcie (x_s, y_t) będziemy przybliżoną wartością funkcji $f(x, y)$.

Wprowadzenie sektorów zabezpiecza równomierny wpływ wartości z punktów leżących wokół węzła i gwarantuje nam, że węzeł (s, t) leży wewnątrz wielokąta, jaki można opisać na punktach uwzględnianych w obliczeniach (poza wielokątem wielomian może przyjmować wartości bardzo znacznie różniące się od wartości uwzględnianych w obliczeniach).

Metoda aproksymacji wielomianem 2 stopnia umożliwia wykrycie ekstremalnych wartości szukanej funkcji, niemniej warto zaznaczyć, że niektóre wartości otrzymane tą metodą mogą być bardzo mało prawdopodobne (na ryc. 4 ostre maksimum w środkowej części mapy). Wynika to z faktu, że w tym przypadku punkty uwzględniane w obliczeniach wykazują tendencję do grupowania się wzdłuż dwóch prostych, niemal równoległych, natomiast brak jest punktu (z dużą wagą) między tymi prostymi. W takich przypadkach nie dysponujemy żadną możliwością kontroli poprawności uzyskanego wyniku. Istnieją wprawdzie w niektórych pracach (5) ograniczenia, że otrzymana wartość nie może być większa od największej wartości uwzględnianej w obliczeniach więcej niż o 20% (podobne ograniczenie od dołu), ale te ograniczenia są sztuczne i nie rozwiązują problemu. We wszystkich przypadkach, gdy ilość punktów danych jest mniejsza niż 7, tzn. istnieją sektory pozbawione punktów, wartość funkcji jest nieokreślona. Taka sytuacja ma miejsce w węzłach siatki położonych blisko brzegu wielokąta G.

Pokryjmy badany obszar siatką kwadratową, którą w odróżnieniu od siatki podstawowej będziemy nazywali siatką dodatkową. Dowolny węzeł siatki dodatkowej (Q, R) jest zlokalizowany przez parę współrzędnych (x_Q, y_R), gdzie

$$x_Q = x_{min} + Q \cdot H \quad Q = 0, 1, 2, ..., \left[\frac{x_{max} - x_{min}}{H}\right]$$
$$y_R = y_{min} + R \cdot H \quad R = 0, 1, 2, ..., \left[\frac{y_{max} - y_{min}}{H}\right] \qquad [6]$$

H oznacza rozmiar siatki dodatkowej.

Niech K_{QR} oznacza kwadrat, którego środek leży w punkcie (x_Q, y_R), długość boku tego kwadratu wynosi $2H$, przy czym boki kwadratu pokrywają się z liniami tworzącymi siatkę dodatkową. Rozmiar siatki dodatkowej H dobieramy tak, aby w każdym kwadracie K_{QR} było położonych od kilku do kilkunastu punktów danych. I dalsze oznaczenia: niech N_{QR} oznacza ilość punktów w kwadracie K_{QR}, przez $P^m(x, y)$ oznaczmy wielomian stopnia m, a przez L_m ilość współczynników tego wielomianu, wówczas

$$L_m = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \qquad [7]$$

Dla każdego kwadratu K_{QR} obliczamy metodą najmniejszych kwadratów współczynniki wielomianu $P_{QR}(x, y)$, przy czym stopień tego wielomianu m dobieramy w ten sposób, aby spełniona była nierówność:

$$L_m + 1 \leqslant N_{QR} < L_{m+1} + 1 \qquad [8]$$

Niech (s, t) będzie węzłem siatki podstawowej, w którym chcemy określić przybliżoną wartość funkcji $f(x, y)$. Węzeł (s, t), tzn. punkt o współrzędnych (x_s, y_t) leży wewnątrz pewnego kwadratu siatki dodatkowej. Załóżmy, że jest to kwadrat, którego wierzchołki leżą w punktach o współrzędnych (x_Q, y_R), (x_Q, y_{R+1}), (x_{Q+1}, y_{R+1}), (x_{Q+1}, y_R) (ryc. 5). W kwadracie tym są określone cztery wielomiany $P_{QR}(x, y)$, $P_{QR+1}(x, y)$, $P_{Q+1R+1}(x, y)$, $P_{Q+1R}(x, y)$. Przybliżoną wartość funkcji $f(x, y)$ w węźle (s, t) definiujemy w następujący sposób:

$$F(x_s, y_t) = w_{QR}P_{QR}(x_s, y_t) + w_{QR+1}P_{QR+1}(x_s, y_t) + w_{Q+1R+1}P_{Q+1R+1}(x_s y_t) + w_{Q+1R}P_{Q+1R}(x_s, y_t) \qquad [9]$$

gdzie

$$w_{QR} = \left(1 - \frac{x_s - x_Q}{H}\right)\left(1 - \frac{y_t - y_R}{H}\right)$$

$$w_{QR+1} = \left(\frac{x_s - s_Q}{H}\right)\left(1 - \frac{y_t - y_R}{H}\right)$$

$$w_{Q+1R+1} = \left(\frac{x_s - x_Q}{H}\right)\left(\frac{y_t - y_R}{H}\right)$$

$$w_{Q+1R} = \left(1 - \frac{x_s - x_Q}{H}\right)\left(\frac{y_t - y_R}{H}\right)$$

Jest to wzór na średnią ważoną, przy czym funkcja wagowa została określona w ten sposób, aby w obrębie jednego kwadratu siatki dodatkowej uzyskać równomierny wpływ wartości poszczególnych wielomianów w zależności od odległości węzła (s, t) od środków kwadratów, dla których zostały określone te wielomiany, poza tym tak określona funkcja wagowa umożliwia ciągłe przejście od jednego do następnego kwadratu siatki dodatkowej. Łatwo sprawdzić, że:

$$w_{QR} + w_{QR+1} + w_{Q+1R+1} + w_{Q+1R} = 1 \qquad [10]$$

W metodzie opisanej powyżej uwzględniane są tendencje zmian wartości funkcji wokół każdego węzła siatki podstawowej, istnieje zatem możliwość wykrycia ekstremalnych wartości szukanej funkcji. Metodą aproksymacji w siatce dodatkowej możemy określić przybliżoną wartość funkcji w każdym węźle siatki podstawowej leżącym wewnątrz wielokąta G.

Testowe badania wykazały, że najlepsze rezultaty można otrzymać stosując metodę aproksymacji w siatce dodatkowej, ale i ta metoda (tym bardziej że jest to metoda nowa) jest aktualnie ulepszana i dopracowywana.

Na zakończenie chciałbym zaznaczyć, że mapy konturowe otrzymane za pomocą opisanych wyżej algorytmów nie zastąpią i nie mogą zastąpić map opracowanych przez doświadczonego geologa, mogą jedynie stać się pomocnym narzędziem w procesie tworzenia map, a zwłaszcza wówczas, gdy ten proces jest realizowany w systemie pracy interakcyjnej (użytkownik — emc) za pomocą grafoskopu z piórem świetlnym (urządzenie dołączone do maszyny cyfrowej wyposażone w ekran, na którym użytkownik może nanosić zmiany na otrzymanych mapach piórem świetlnym).

LITERATURA

1. Batha J. B., Reese J. R. — Surface determination and automatic contouring for mineral exploration, extraction and processing. Colorado School Mines Quart., 1964, Vol. 59.
2. Crain I. K. — Computer interpolation and contouring of two-dimensional data. Geoexploration, 1970, Vol. 8.
3. Graphic Analysis of Three-dimensional Data (GATD). IBM Corporation. White Plains, 1971.
4. Martin J. — Design of man-computer dialogues. Prentice Hall, New Jersey, 1973.
5. Mc Intyre D. B., Pollard D. D., Smith R. — Computer programs for automatic contouring. Kansas Geol. Survey. Computer Contr., 1968, Vol. 23.
6. Owczarczyk J. — Konturowanie automatyczne. Prz. geol. 1974, nr 9.
7. Parslow R. D., Green R. Elliot — Advanced computer graphics. Plenum Press London, 1971.
8. Parslow R. D., Green R. Elliot — Computer graphic in medical research and hospital administration Ibidem.

SUMMARY

The paper deals with the techniques of determination of surface represented by the image of continuous function of two variables, on the basis of set of values of this function for irregularly spaced data. The calculations may be made using e.m.c. A new algorithm — the method of approximation in extra grid — is presented.

РЕЗЮМЕ

В статье описаны методы определения поверхности, являющейся выражением непрерывной функции двух переменных на основании совокупности значений этой функции в неравномерно расположенных точках замера. Описанные методы могут решаться с помощью ЭВМ. Представлен новый алгоритм — метод аппроксимации в дополнительной сетке.