

## WYZNACZANIE GŁĘBOKOŚCI DO STROPU HORYZONTU WYSOKOOPOROWEGO

Podstawowym zadaniem prac geoelektrycznych jest często określanie głębokości do stropu horyzontu wysokooporowego. Zadanie to można realizować metodą pionowych sondowań elektrycznych. Przy bardzo dużym stosunku oporności horyzontu oporowego i nadkładu prawe gałęzie krzywych sondowań mają asymptoty nachylone do osi odciętych pod kątem równym 45°. W tych warunkach znając średnią oporność wzdłużną całego nadkładu  $\varrho_l$  można wyznaczyć głębokość, na której występuje horyzont wysokooporowy. Nie zawsze jednak znamy wartość średniej oporności wzdłużnej albo wyznaczona wartość jest obciążona dużym błędem. W takich przypadkach wyznaczenie głębokości do stropu horyzontu wysokooporowego jest niemożliwe lub niedokładne. Zaproponowana przez autora metoda pozwala na podstawie analizy prawych gałęzi krzywych sondowań dla przypadku  $\varrho_n = \infty$  wyznaczyć głębokość do stropu horyzontu wysokooporowego i średnią oporność wzdłużną nadkładu. Poniżej podane są podstawowe założenia metody.

Rozpatrzmy przekrój geoelektryczny z poziomymi granicami rozdziału, w którym ostatnia warstwa jest izolatorem. Jeżeli w rozpatrywanym przez nas przekroju płynie prąd, to na dostatecznie dużej odległości od źródła zasilania  $r = AB/2$  można przyjąć, że linie prądu będą równoległe do powierzchni horyzontu wysokooporowego. W takim przypadku wprowadzamy pojęcie średniej oporności wzdłużnej  $\varrho_l$  i przewodności wzdłużnej nadkładu  $S$  (4). Możemy zatem przekrój wielowarstwowy zastąpić ekwiwalentnym przekrojem dwuwarstwowym, przy czym warunki ekwiwalencji są następujące:

$$h_1^* = H \quad \varrho_1^* = \varrho_l \quad S_1^* = S \quad \varrho_s^* = \varrho_n \quad \dots \quad [1]$$

gdzie:  $h_1^*$ ,  $S_1^*$ ,  $\varrho_1^*$ ,  $\varrho_s^*$  są parametrami ekwiwalentnego przekroju dwuwarstwowego, a  $H$  i  $\varrho_l$  odpowiednio: sumaryczna miąższość i średnia oporność wzdłużna nadkładu wielowarstwowego przekroju. Pomiędzy  $H$ ,

$S$  i  $\varrho_l$  zachodzi związek:  $\varrho_l = \frac{H}{S}$ . Równanie prawej

asymptoty ekwiwalentnego przekroju dwuwarstwowego dla dostatecznie dużej odległości punktu obserwacji od źródła zasilania ma postać (5):

$$\varrho_k = \varrho_l \frac{r}{H} \quad \dots \quad [2]$$

gdzie:  $\varrho_l$  i  $H$  są odpowiednio średnią opornością wzdłużną i sumaryczną miąższością nadkładu wielowarstwowego przekroju. Z ostatniego równania nie możemy wyznaczyć jednocześnie interesujących nas wielkości  $\varrho_l$  i  $H$ . Mając na uwadze warunki ekwiwalencji [1] możemy napisać równanie:

$$\varrho_k = \varrho_l \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^3}{[r^2 + (2nH)^2]^{3/2}} \right) \quad [3]$$

Jednak w tej postaci równanie [3] nie nadaje się do numerycznych obliczeń. Na podstawie analizy krzywych dwuwarstwowych okazuje się, iż wyrażenie opisane szeregiem nieskończonym można aproksymować funkcją (2):

$$y = a \left( \frac{r}{H} \right)^\beta \quad \dots \quad [4]$$

w której trzeba wyznaczyć współczynniki  $a$  i  $\beta$ . Równanie [4] w układzie dwulogarytmicznym przedstawia linię prostą. Biorąc pod uwagę właściwość zachowania kształtu krzywych [3] niezależnie od  $H$  i  $\varrho_l$  (wykreślanych w układzie dwulogarytmicznym) oraz wspólne nachylenie prawej asymptoty tych krzywych do osi odciętych, jest oczywiste, że współczynniki  $a$  i  $\beta$  będą wspólne dla wszystkich krzywych rodziny [4]. Analiza krzywych [3] wykazała, że współczynniki  $a$  i  $\beta$  dla danej krzywej nie są wielkościami stałymi, ale zmieniają się wraz ze zmianą stosunku  $r/H$ , jednak na tyle powoli, aby dla pewnych przedziałów  $r/H$  współczynniki te można było uznać za stałe z wystarczającą dla obliczeń oporności pozornej dokładnością (tab. I).

Tabela I

WARTOŚCI WSPÓLCZYNNIKA WYLICZONE DLA ODPOWIEDNIICH STOSUNKÓW  $r/H$

$\frac{r}{H}$	$\beta$	$\frac{r}{H}$	$\beta$	$\frac{r}{H}$	$\beta$
4	1.408	9	1.135	30	1.039
5	1.289	10	1.097	40	1.024
6	1.226	15	1.095	50	1.019
7	1.157	20	1.087	60	1.015
8	1.152	25	1.047	70	1.014

Widzimy, iż ze wzrostem wartości stosunku  $r/H$  wartość bezwzględna współczynnika  $\beta$  również rośnie. Dla małych stosunków  $r/H$  zmiany wartości  $\beta$  są stosunkowo znaczne, natomiast dla dużych wartości  $r/H$  zmiany  $\beta$  są coraz powolniejsze. Dla odpowiednich przedziałów  $r/H$  współczynnik  $\beta$  jest średnią arytmetyczną ze współczynników wchodzących w dany zakres  $r/H$ . Obliczenia wykazują, że dla współczynników  $a$  i  $\beta$  należy przyjąć następujące wartości:

$$\text{dla } 6 < \frac{r}{H} < 20 \quad a = 0.3388 \quad \beta = 1.119$$

$$\text{dla } 20 < \frac{r}{H} < 70 \quad a = 0.4402 \quad \beta = 1.027$$

Uwzględniając powyższe wartości dla oporności pozornej możemy napisać następujące związki:

$$\text{dla } 6 < \frac{r}{H} < 20 \quad \varrho_k = \varrho_l + 0.6776 \varrho_l \left( \frac{r}{H} \right)^{1.119} \quad [5]$$

$$\text{dla } 20 < \frac{r}{H} < 70 \quad \varrho_k = \varrho_l + 0.8804 \varrho_l \left( \frac{r}{H} \right)^{1.027}$$

Błąd  $\frac{\Delta \varrho_k}{\varrho_k}$  określenia wartości oporności pozornej wzorami [5] określa tab. II.  $\Delta \varrho_k = \varrho_{k1} - \varrho_{k2}$  gdzie:  $\varrho_{k1}$  — wartość oporności pozornej wyznaczonej teoretycznie, a  $\varrho_{k2}$  — według wzoru [5].

Tabela II

$\frac{r}{H}$	6	7	8	9	10	15	20	25	30	40	50	60	70
$\frac{\Delta \rho_k}{\rho_k} 100\%$	-0.53	+0.29	+0.69	+0.89	+0.88	-0.20	-1.78	-0.016	+0.17	+0.22	+0.13	+0.060	-0.14

Równanie [5] przepisujemy w następującej postaci:

$$\rho_k = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \quad 6 < \left(\frac{r}{H}\right) < 20 \quad [6]$$

$$\rho_k = b_{11}y_1 + b_{21}y_2 \quad 20 < \left(\frac{r}{H}\right) < 70$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_{11}, b_{11} &= 1 & x_1, y_1 &= \rho_l \\ a_{21} &= r^{1.119} & x_2 &= 0.6776 \rho_l H^{-1.119} \\ b_{21} &= r^{1.027} & y_2 &= 0.8304 \rho_l H^{-1.027} \end{aligned} \quad [6']$$

W równaniu [6] mamy dwie niewiadome  $x_1$  i  $x_2$ . Będziemy rozważali tylko pierwsze z równań [6]. Wszystkie wnioski będą oczywiście obowiązujące dla drugiego równania [6]. W celu ich wyznaczenia możemy napisać układ równań:

$$\begin{aligned} \rho_{k_1} &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ \rho_{k_2} &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \rho_{k_n} &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 \dots \dots \dots [7] \end{aligned}$$

gdzie  $n$  oznacza numer kolejny pomiaru (obserwacji). Układ równań [7] rozwiążemy metodą najmniejszych kwadratów. W przypadku, gdy wszystkie pomiary (obserwacje) można uważać za wykonane z jednakową dokładnością (pomiary dokonywane są przyrządem tej samej klasy, pomiar odległości dokonany tymi samymi przyrządami itd.) zasada najmniejszych kwadratów prowadzi do równania:

$$\sum_{i=1}^n [\rho_{k_i} - (a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2)]^2 = \min \dots [8]$$

Spełnienie warunku minimum dla sum kwadratów odchyłek prowadzi do następujących równań normalnych [4]:

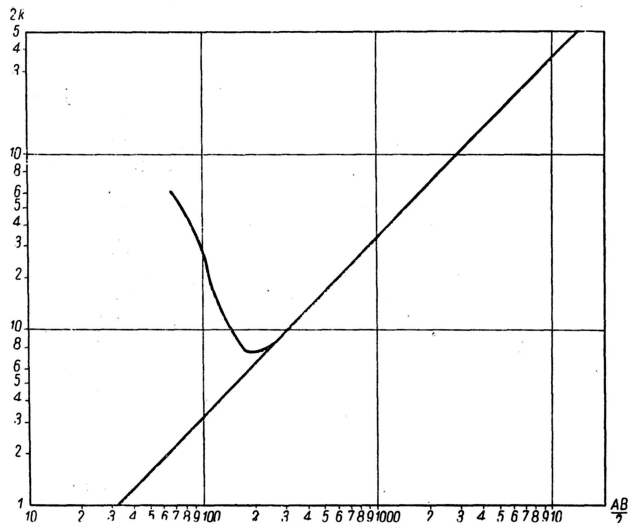
$$\begin{aligned} [a_1 a_1] x_1 + [a_1 a_2] x_2 - [a_1 \rho_k] &= 0 \\ [a_2 a_1] x_1 + [a_2 a_2] x_2 - [a_2 \rho_k] &= 0 \dots [9] \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} [a_1 a_1] &= a_{11} a_{11} + a_{12} a_{12} + \dots + a_{1n} a_{1n} \\ [a_1 a_2] &= a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + \dots + a_{1n} a_{2n} = [a_2 a_1] \\ [a_2 a_2] &= a_{21} a_{21} + a_{22} a_{22} + \dots + a_{2n} a_{2n} \\ [a_1 \rho_k] &= a_{11} \rho_{k1} + a_{12} \rho_{k2} + \dots + a_{1n} \rho_{kn} \\ [a_2 \rho_k] &= a_{21} \rho_{k1} + a_{22} \rho_{k2} + \dots + a_{2n} \rho_{kn} \dots [9'] \end{aligned}$$

Z układu [9] w prosty sposób wyznaczamy niewiadome  $x_1$  i  $x_2$ . Ponieważ  $x_2$  przedstawia dosyć niewygodny do wyliczenia miąższość związek, więc znając  $x_1 = \rho_l$  miąższość  $H$  określamy na podstawie wzoru [2]. Ostatecznie dla określenia  $\rho_l$  i  $H$  mamy następujące wzory:

$$\begin{aligned} \rho_l &= \frac{[a_2 \rho_k] [a_1 a_2] - [a_2 a_2] [a_1 \rho_k]}{[a_1 a_2]^2 - [a_1 a_1] [a_2 a_2]} \\ H &= \frac{\rho_l r}{\rho_k} \dots \dots \dots [10] \end{aligned}$$



Wszystkie wyrażenia wchodzące do wzorów [10] są określone przez związki [6'] i [9'].

W charakterze przykładu przeprowadzmy obliczenia dla krzywej trójwarstwowej pokazanej na rysunku.

Tabela III

$a_{11}$	$a_{21}$	$a_{11}^2$	$a_{11} a_{21}$	$a_{21}^2$	$a_{11}$	$a_{21}$	
1	13.153	31,0	1	13 153	173.001	31,0	407.743
1	17.635	40,2	1	17.635	310.993	40,2	708.927
1	20.705	46,8	1	20.705	428.697	48,6	968.994
1	23.810	52,0	1	23.810	566.916	52,0	1238.120
1	28.565	63,0	1	28.565	815.959	63,0	1789.595
$\Sigma$			5	103.868	2295.566	233.000	5123.376

Układ równań normalnych ma następującą postać:

$$\begin{aligned} 5 x_1 + 103.868 x_2 &= 233.000 \\ 103.868 x_1 + 2295.566 x_2 &= 5123.379 \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy dla  $x_1$  wartość  $x_1 = \rho_l = 3.91$  omm. Na podstawie związku [2] wyliczamy głębokość do stropu horyzontu wysokooporowego. Jej średnia wartość wynosi  $H = 131$  m. Teoretyczne wartości są następujące:

$$\rho_l = 4.07 \text{ omm } H = 136 \text{ m}$$

Różnica między wartością rzeczywistą, a obliczoną głębokością nie przekracza w tym przypadku 5%.

#### WNIOSKI I UWAGI

1. W celu wyznaczenia głębokości do stropu horyzontu wysokooporowego potrzebna jest tylko prawa asymptota krzywej oporności pozornej. Fakt ten pozwala skrócić czas prac polowych.

2 Na podstawie obliczeń przeprowadzonych dla kilkunastu krzywych, błąd  $\frac{\Delta \rho_l}{\rho_l} = \frac{\Delta H}{H}$  nie przekraczał 10%.

3 Konieczna jest bardzo dokładna znajomość wartości oporności pozornej. Celowe byłoby zwiększenie

modułu skali dwulogarytmicznej. Pozwoliłoby to na dokładniejsze wykreślenie krzywych  $\varrho_k$  i odczytanie wartości  $\varrho_k$ .

4. Na podstawie związku [2] widzimy, iż zmiany wartości rozstawu  $r$  są wprost proporcjonalne do zmian wartości  $H$ . W związku z tym można przyjąć, że  $r$  zmienia się tylko w zakresie od 1 do 70, co znacznie ułatwia obliczenia. Dla tych wartości  $r$  zostały obliczone odpowiednie potęgi wchodzące do wzorów [5].

5. Przedstawioną wyżej metodę można stosować, jeżeli  $\varrho_n = \infty$ . Dla przypadków, gdy  $\varrho_n < \infty$  Bierdiczewskij (1) opracował metodę określania sumarycznej przewodności wzdłużnej  $S$ . Połączenie tych dwóch metod pozwala na określanie głębokości do stropu horizontu wysokooporowego w przypadkach, gdy  $\varrho_n < \infty$ .

Poniżej podaje się wartości potęg wchodzących do związków [5] dla danych rozstawów  $r = AB^2$  w zakresie od 1 do 70.

$r$	$r^{1.119}$	$r$	$r^{1.027}$
1	1	10	10.06
2	2.172	11	11.735
3	3.418	12	12.83
4	4.718	13	13.93
5	6.054	14	15.03
6	7.426	15	16.14
7	8.823	16	17.24
8	10.245	17	18.35
9	11.69	18	19.46
10	13.15	19	20.57
11	14.63	20	21.68
12	16.13	21	22.80
13	17.635	22	23.91
14	19.16	23	25.03
15	20.70	24	26.15
16	22.24	25	27.26
17	23.81	26	28.40
18	25.39	27	29.52
19	26.97	28	30.64
20	28.56	29	31.75

$r$	$r^{1.027}$	$r$	$r^{1.027}$
30	32.88	31	34.02
32	35.14	33	36.26
34	37.40	35	38.53
36	39.65	37	40.78
38	41.93	39	43.06
40	44.20	41	45.32
42	46.45	43	47.60
44	48.73	45	49.87
46	51.01	47	52.15
48	53.29	49	54.43
50	55.58	51	56.72
52	57.85	53	59.00
54	60.14	55	61.29
56	62.43	57	63.58
58	64.72	59	65.87
60	67.01	61	68.16
62	69.30	63	70.44
64	71.59	65	72.75
66	73.90	67	75.05
68	76.20	69	77.34
70	78.50		

#### LITERATURA

1. Bierdiczewskij M. N. — Ob opriedelenii sumarnoj prodolnoj prowadimosti nad opornych otłożenij, Razwiedocznaja i promysłowaja geofizika, wyp. 19.
2. Demidowicz B. N. — Cislennyje metody analiza. Moskwa. 1962.

3. Kalenow E. N. — Intierprietacja kriwych wiertikalnowo elektriceskowo zondirowanija, Gostoptiechizdat, Moskwa 1957.
4. Warchałowski E. — Rachunek wyrównawczy dla geodetów. PWN, 1955
5. Zaborowski A. N. — Elektrorazwiedka. Gostoptiechizdat 1943.

#### SUMMARY

The author gives a method of calculating depth to the roof of high-resistance horizon, based on analysis of right asymptotes of multi-layer curves of vertical electrical soundings. Taking into account the principle of equivalency, the multi-layer geoelectrical section was reduced, according to Hummel's principle, to two-layer section. For this section the equation of apparent resistance was approximated by a function being rather easy for calculation.

In this work a method of least squares was used.

#### РЕЗЮМЕ

Автор описывает метод определения глубины залегания кровли горизонта с высоким сопротивлением, основывающийся на анализе асимптот правых ветвей кривых многослойных вертикальных электрозондирований. Учитывая правило эквивалентности, многослойный электрический профиль был сокращен до двухслойного профиля (согласно правилу Хуммельса). Для этого профиля уравнение кажущегося сопротивления было определено при помощи функции, которую можно легко рассчитать. В статье применен метод приближенных квадратов.