WIESŁAW HEFLIK
Akademia Górniczo-Hutnicza

O POPRAWKACH NA WIELKOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA ZAŁAMANIA ŚWIATŁA STOSOWANYCH PRZY OKREŚLANIU POŁOŻENIA OSI INDYKATRYSY

UKD 549.1.022/.024:535.542:535.525.3(083.3 + 083.57)

Treść niniejszego artykułu zaczerpnięto z pracy W.W. Doliwo-Dobrowolskiego, opublikowanej w „Zapiskach Wsiesojuznogo Minierałogicz. Obszcz." nr 2 z 1965 r.

Poprawki na wielkość współczynników załamania światła konieczne do wprowadzenia przy określaniu położenia osi indykatrysy przy użyciu stolika Fiodorowa są dla kryształów jednoosiowych różne zarówno pod względem wielkości, jak też i znaku. Są one zależne od dwóch możliwych przypadków orientacji osi indykatrysy w stosunku do osi stolika Fiodorowa. Po umieszczeniu w położeniu zgodnym z osią I stolika Fiodorowa średnicy przekroju kołowego kryształu, zależność między rzeczywistym kątem nachylenia osi optycznej do płaszczyzny szlifu Ho a zmierzonym kątem nachylenia Hn wyraża się równaniem:

$$\operatorname{tg} Ho = K \operatorname{tg}(2Hn - Ho) \qquad [1]$$

K — współczynnik zależny od stosunku współczynnika załamania światła szklanych segmentów stolika n_c do współczynnika załamania światła dla promienia nadzwyczajnego w krysztale n_e, a także od kąta padania i. W pierwszym, zazwyczaj korzystniejszym przypadku, można przyjąć $i = 45°$, wtedy wielkość K określa się z równania:

$$K = K_{45} = \frac{2 + \left(\frac{n_c}{n_e}\right)^2 - \left(\frac{n_c}{n_e}\right)\sqrt{2 - \left(\frac{n_c}{n_e}\right)^2}}{\left(\frac{n_c}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{n_c}{n_e}\right)\sqrt{2 - \left(\frac{n_c}{n_e}\right)^2}} \qquad [2]$$

Stosunkowo łatwo można stwierdzić, że jeżeli $\frac{n_c}{n_e} = 1$, $K_{45} = 1$, a prz. $\frac{n_c}{n_e} \neq 1$ to $K > 1$. Przy równych współczynnikach załamania światła n_c i n_e kąt zmierzony równa się kątowi rzeczywistemu ($Hn = Ho$), a przy różnych współczynnikach załamania światła n_c i n_e kąt zmierzony jest mniejszy od rzeczywistego ($Hn < Ho$), niezależnie od tego, który ze współczynników załamania światła n_c lub n_e jest większy. W myśl tych założeń poprawkę tę wprowadził W. B. Kamb (5).

Uzyskane przez W. B. Kamba (5) wywody odnoszą się do poprawek na współczynniki załamania światła dla kryształów jednoosiowych i całkowicie pokrywają się z wywodami W.W. Doliwo-Dobrowolskiego (2). Równania wprowadzone przez wymienionych autorów do wyliczenia tych poprawek są różne. Dla przykładu można podać, że równanie W.A. Kamba (5) dla przypadku, kiedy oś optyczna jest zgodna z osią I stolika jest następujące:

$$\sin H_o = \sqrt{f(H_n, m, I)} \ldots \qquad [3]$$

gdzie: $f(H_n, m, I)$ — bardzo złożona, co do formy, funkcja zmierzonego kąta nachylenia H_n, odnosząca się do współczynnika załamania światła minerału i segmentów $m = \frac{n_n}{n_c}$ i kąta nachylenia wokół osi I stolika. Rozkładając tę funkcję w porządku zgodnym z wartościami kątowymi H_n i odrzucając czło-

PORÓWNANIE REZULTATÓW WARTOŚCI Ho WYLICZONYCH NA PODSTAWIE RÓŻNYCH RÓWNAŃ

Wielkości wyjściowe			Wielkości wyliczone			
$\frac{n_e}{n_c}$	Hn	I	według równania [1] $K = K_i$	według równania W.B. Kamba [3]	według równania [1] $K = K_{45}$	według liniowego równania W.B. Kamba [4]
1,2	20°	0°	20°20′	20°20′	20°31′	20°20′
1,2	20°	40°	20°31′	20°31′		
1,2	40°	0°	40°42′	40°43′	40°48′	40°40′
1,2	40°	40°	41°02′	41°03′		
1,2	60°	0°	61°07′	61°06′	60°42′	61°00′
1,548	20°	0°	21°46′	21°55′		
1,548	20°	40°	22°24′	22°38′	22°26′	21°56′
1,548	40°	0°	43°26′	43°37′	43°44′	43°53′
1,548	40°	40°	44°29′	44°43′		
1,548	60°	0°	64°30′	64°28′	63°17′	65°49′

ny wyższych rządów W. B. Kamb uzyskał w przybliżeniu równanie liniowe:

$$H_o = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) Hn \ldots \qquad [4]$$

Ponieważ równania 1, 3 i 4 mają jednocześnie różne wzory nasuwa się wielorakie porównanie rezultatów ich zastosowania. Rezultaty odczytu wielkości H_o według tych równań dla kilku różnych wielkości współczynników załamania $\frac{n_e}{n_c}$ zmierzonych kątów nachylenia H_n i kątów nachylenia wokół osi I przedstawia tabela.

Rezultat uzyskany za pomocą równania [1] otrzymano przy użyciu dwóch przybliżeń. W pierwszym przybliżeniu K brano równe K_{45}, które wyliczono z równania [2]. Przy bardziej dokładnym odczycie K brano równe K_i, wielkość którego zależy od kąta padania i i kąta załamania r (1).

$$K_i = \frac{1 - \cos i \cos r_e \cos (i - r_e)}{\sin i \sin r_e \cos (i - r_e)} \qquad [5]$$

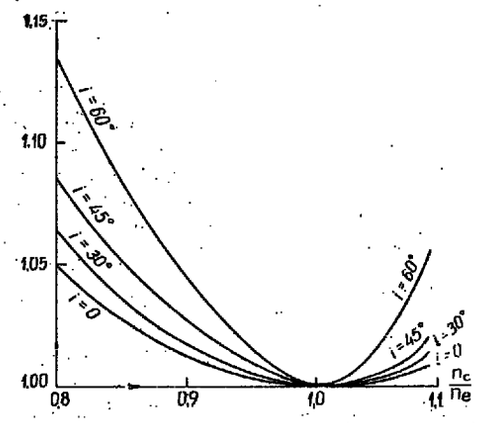
Wyrażenie to dla K_i można przekształcić w następującą formę:

$$K_i = \frac{1 + \left(\frac{n_c}{n_e}\right)^2 \cos^2 i - \left(\frac{n_c}{n_e}\right) \cos i \sqrt{1 - \left(\frac{n_c}{n_e}\right)^2 \sin^2 i}}{\left(\frac{n_c}{n_e}\right)^2 \sin^2 i + \left(\frac{n_c}{n_e}\right) \cos i \sqrt{1 - \left(\frac{n_c}{n_e}\right)^2 \sin^2 i}} \qquad [6]$$

Wielkość kąta padania i związana z wielkościami nachyleń wokół osi H i I za pomocą stolika Fiodorowa powiązana jest prostym stosunkiem:

$$\cos i = \cos H_n \cos I \qquad [7]$$

Na ryc. 1 przedstawiono zależność wielkości Ki od kąta padania i i od stosunku współczynnika załamania światła $\frac{n_c}{n_e}$ wyrażoną równaniem [6]. Jak widać z tabeli dokładne metody odczytu dokonane z równania [1] W. W. Doliwo-Dobrowolskiego (2) i z równania [3] W. B. Kamba dają bardzo zbliżone rezultaty. Dla $\frac{n_e}{n_c} = 1{,}2$ (co dla półsfer z $n_c = 1{,}647$



Ryc. 1. Zależność współczynnika „Ki" od kąta padania „i" i od stosunku współczynnika załamania szklanych segmentów i kryształu.

Fig. 1. Dependence of the coefficient „Ki" on angle of incidence „i" and the ratio of coefficients of refraction of glass segment and crystal.

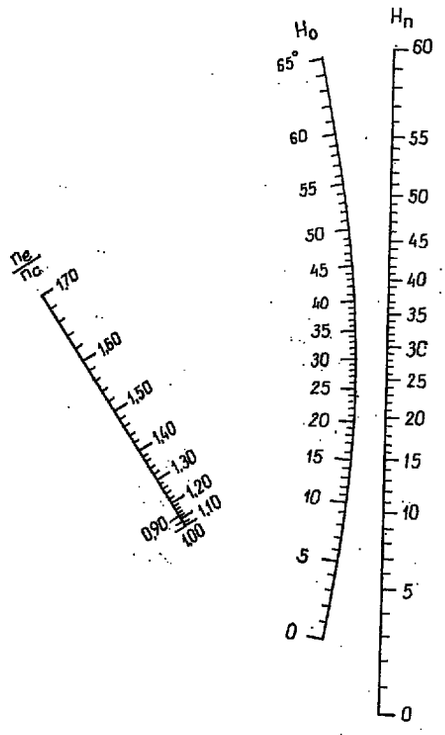
odpowiada minerałowi z $n_e = 1{,}976$) różnica nie przewyższa 1; dla $\frac{n_e}{n_c} = 1{,}548$ różnica nie przewyższa 1/4 stopnia.

Pewne odchylenie obserwuje się w przypadku odczytów zbliżonych do siebie, co ma miejsce dla odchyleń przewyższających dokładność pomiaru, np. przy bardzo dużych wielkościach $\frac{n_e}{n_c}$ (przy pomiarach bez szklanych segmentów stolika) i przy bardzo dużych kątach nachylenia stolika.

Dla określenia wielkości poprawki według równania [1] (w pewnym przybliżeniu przyjmuje się $K = K_{45}$) skonstruowany został specjalny nomogram (1). Nomogram ten adekwatny jest tylko dla wartości $\frac{n_e}{n_c}$, zawartej w przedziałach od 1,093 do 1,518 i kątów nachylenia H_n nie przewyższających 50°. Przy użyciu półsfer z $n_c = 1{,}647$ nomogram ten można stosować w pełnym zakresie kątowym i współczynnikowym, a przy pracy bez półsfer w/w przedziały wartości $\frac{n_e}{n_c}$ okazują się niedostateczne.

Wobec niedoskonałości tego nomogramu W.W. Doliwo-Dobrowolski (2) skonstruował bardziej prosty i wygodny w pracy nomogram, złożony z trzech skal. Nomogram taki przedstawiony jest na ryc. 2. Posługiwanie się nim jest nadzwyczaj proste. Odczytów można dokonywać przeprowadzając krawędź linijki przez punkty na skalach $\frac{n_e}{n_c}$ i H_n, odpowiadające danemu stosunkowi $\frac{n_e}{n_c}$ (albo przy pomiarze bez półsfer, bezpośrednio biorąc wielkości n_e minerału) i przez zmierzony kąt nachylenia. Punkt przecięcia tej prostej (krawędzi linijki ze skalą H_o) bezpośrednio daje poszukiwaną właściwą wartość kąta nachylenia.

Celem skonstruowania monogramu, przedstawionego na ryc. 2. należy równanie [1] uprzednio dopro-



Ryc. 2. Nomogram do rozwiązywania równania [1] przy $K = K_{45}$

Fig. 2. Nomogram for solving the equation [1] when $K = K_{45}$.

wadzić do nomograficznej postaci. Otwierając nawias i przenosząc wszystkie człony na lewą stronę uzyskujemy:

$$\operatorname{tg} 2Hn \operatorname{tg}^2 Ho + \operatorname{tg} Ho + K \operatorname{tg} Ho - K \operatorname{tg} 2Hn = 0 \qquad [8]$$

Równanie to zawiera cztery funkcje trzech zmiennych (Hn, Ho i K) i staje się równaniem czwartego nomograficznego stopnia. Za pomocą odpowiednich przekształceń równanie [8] można sprowadzić do podstawowej formy. W rezultacie tego przymuje ono następującą postać:

$$\frac{\operatorname{tg} Ho}{\operatorname{tg} 2Hn} + \frac{\operatorname{tg}^2 Ho + 1}{K + 1} - 1 = 0 \qquad [9]$$

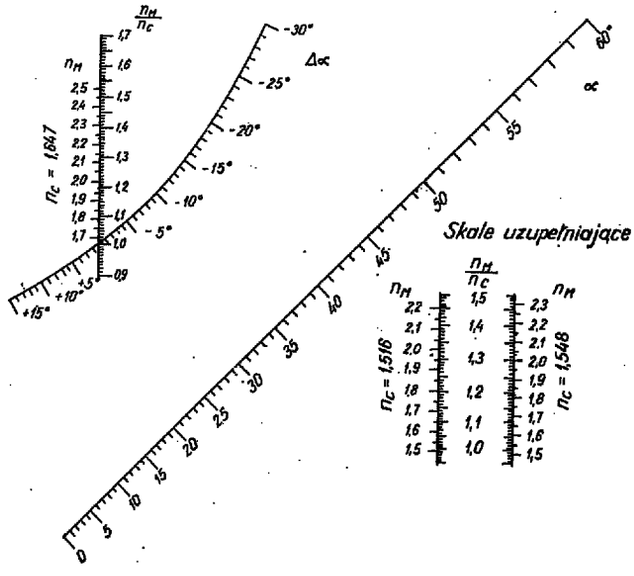
Równanie to daje możliwość rozwiązywania podwójnego nomogramu pierwszego rzędu, tj. nomogramu mającego dwie prostolinijne i jedną krzywolinijną skalę. Okazuje się, że rozwiązywanie zwykłego nomogramu z prostolinijnymi skalami za pomocą równania [9] jest w praktyce niewygodne, ponieważ zawiera nieskończenie odległe punkty. Aby sprowadzić nomogram do postaci wygodniejszej do posługiwania się należy przekształcenia te poddać pewnej analizie (6).

Ogólnie równania skał dla proponowanego nomogramu rozwiązywane równaniem [9] są następujące:

dla skali Hn

$$X_1 = \frac{m_1 K_1 \operatorname{tg} 2Hn}{m_1 \operatorname{tg} 2Hn + 1}$$

$$Y_1 = \frac{m_1 H_1 \operatorname{tg} 2Hn}{m_1 \operatorname{tg} 2Hn + 1}$$



Ryc. 3. Nomogram do rozwiązywania równania [10]. Uzupełniające skale do szybkiego odczytywania wielkości $\frac{n_M}{n_c}$ przy pracy z segmentami z $n_c = 1{,}516$ $n_c = 1{,}548$.

Fig. 3. Nomogram for solving the equation [10].

Supplementary scales for rapid reading of the values $\frac{n_M}{n_c}$ in the course of work with segments with $n = 1.516$ and $n_c = 1.548$.

dla skali K

$$X_2 = \frac{m_2 K_2 (K + 1)}{m_2 (K + 1) + 1}$$

$$Y_2 = \frac{m_2 H_2 (K + 1)}{m_2 (K + 1) + 1}$$

dla skali krzywolinijnej Ho

$$X_3 = \frac{m_1 K_1 \operatorname{tg} Ho + m_2 K_2 (\operatorname{tg}^2 Ho + 1)}{m_1 \operatorname{tg} Ho + m_2 (\operatorname{tg}^2 Ho + 1) + 1}$$

$$Y_3 = \frac{m_1 H_1 \operatorname{tg} Ho + m_2 H_2 (\operatorname{tg}^2 Ho + 1)}{m_1 \operatorname{tg} Ho + m_2 (\operatorname{tg}^2 Ho + 1) + 1}$$

Równania te zawierają sześć parametrów m_1, m_2, H_1, H_2, K_1 i K_2, których znaczenia określają postać i rozmiary nomogramów. Przy konstrukcji nomogramów przyjęto następujące znaczenia parametrów:

$m_1 = 2$ $\quad m_2 = -0{,}3$ $\quad H_1 = 75$

$H_2 = -33,\frac{1}{3}$ $\quad K_1 = 25$ $\quad K_2 = 13,\frac{1}{3}$

Końcowe równania skal przyjmują wówczas następujące formy:

dla skali Hn

$$X_1 = \frac{50 \operatorname{tg} 2Hn}{2 \operatorname{tg} 2Hn + 1}$$

$$Y_1 = \frac{150 \operatorname{tg} 2Hn}{2 \operatorname{tg} 2Hn + 1}$$

dla skali K $\left(\text{skala } \frac{n_e}{n_c}\right)$

$$X_2 = \frac{4(K+1)}{0{,}3K - 0{,}7}$$

$$Y_2 = \frac{10(K+1)}{0{,}7 - 0{,}3K}$$

dla skali Ho

$$X_3 = \frac{50 \operatorname{tg} Ho - 4(\operatorname{tg}^2 Ho + 1)}{2 \operatorname{tg} Ho - 0{,}3(\operatorname{tg}^2 Ho + 1) + 1}$$

$$Y_3 = \frac{150 \operatorname{tg} Ho + 10(\operatorname{tg}^2 Ho + 1)}{2 \operatorname{tg} Ho - 0{,}3(\operatorname{tg}^2 Ho + 1) + 1}$$

Skonstruowany na podstawie tych równań nomogram przedstawiony jest na ryc. 2. Ponieważ skala K cechowana jest nie na podstawie wielkości K, a bezpośrednio według wielkości stosunku $\frac{n_e}{n_c}$, to dla skonstruowania tej skali uprzednio należy znaleźć znaczenie K_{45} za pomocą równania [2].

W przypadku drugiego wariantu ustalenia orientacji kryształu jednoosiowego, przy którym z osią I stolika Fiodorowa pokrywa się średnica przekroju kołowego, wywody W. B. Kamba (5) praktycznie w pełni pokrywają się z wywodami opublikowanymi przez W. W. Doliwo-Dobrowolskiego (1). Wielkość poprawki w tym przypadku z wystarczającą dokładnością określa się równaniem prawa sinusów:

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) = \sin\alpha \frac{n_c}{n_M} \qquad (10)$$

gdzie: α — pomierzony kąt nachylenia, $\Delta\alpha$ — poszukiwana wielkość poprawki, n_c i n_M — współczynniki załamania światła segmentów i minerału.

W przypadku współczynnika załamania światła minerału należy wziąć współczynnik załamania promienia zwyczajnego n_o. Jeżeli $n_M > n_c$, jak to zazwyczaj bywa, to $\Delta\alpha$ ma znak ujemny.

Celem rozwiązania równania [10] (3, 4) został skonstruowany specjalny nomogram znany ze wszystkich prac odnoszących się do metody Fiodorowskiej. Odnosi się on do wszystkich segmentów (o różnych współczynnikach załamania światła). Z diagramu tego można bezpośrednio z odczytu kąta nachylenia stolika odczytać współodpowiadający mu współczynnik załamania światła.

Nie wnikając w krytyczne uwagi wszystkich przedstawionych wcześnej nomogramów, zaznaczyć należy, że dla dokładnego rozwiązania równania [10] można skonstruować bardzo prosty podwójny nomogram, zbudowany z trzech prostych linii. Nomogram ten przedstawiony jest na ryc. 3. Jedna z linii tego nomogramu ma charakter podwójny: opisane są na niej wielkości stosunku $\frac{n_M}{n_c}$ i bezpośrednio na stronie drugiej wartości współczynników załamania światła, w tym przypadku dla segmentów z $n_c = 1{,}647$. Jeżeli posługujemy się segmentami ze współczynnikami załamania światła 1,516 lub 1, 548, to dla znalezienia $\frac{n_M}{n_c}$ ze znanej wielkości n_M można posługiwać się dopełniającymi podwójnymi skalami przebiegającymi względem siebie równolegle. Posługiwanie się tym nomogramem jest analogiczne do poprzedniego przedstawionego nomogramu.

W przypadku zastosowania segmentów z $n_c = 1{,}647$ można to uczynić bezpośrednio, przykładając linijkę na punkty na skali n_M i α, odpowiadające współczynnikom załamania światła minerału i odpowiedniemu kątowi nachylenia. Punkt przecięcia tej prostej (krawędź linijki) na skali $\Delta\alpha$ daje bezpośrednio szukaną wielkość poprawki. W przypadku korzystania z segmentów ze współczynnikami załamania światła 1,516 lub 1,548 należy uprzednio za pomocą dodatkowych podwójnych skal znaleźć wielkość $\frac{n_M}{n_c}$ odpowiadającą współczynnikowi załamania światła minerału.

Nomogram ten zobrazowany jest na ryc. 3. Otwierając nawias w równaniu [10] oraz dzieląc równanie przez $\sin\alpha$ otrzymuje się:

$$\frac{n_c}{n_M} = \frac{\sin\Delta\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \cos\Delta\alpha = 0$$

Równanie to jest podobne do równania [9]. Równania skal nomogramu są następujące:

dla skali $\frac{n_M}{n_e}$

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = \mu_1 \frac{n_M}{n_c}$$

dla skali α

$$x_2 = \mu_2 \operatorname{tg}\alpha \qquad y_2 = 0$$

Dla skali $\Delta\alpha$

$$x_3 = -\mu_2 \operatorname{tg}\Delta\alpha \qquad y_3 = \mu_1 \sec\Delta\alpha$$

Stałe skali μ_1 i μ_2 wynoszą 50 mm. Nomogram ten zbudowano nie w prostokątnym, a w ukośnym układzie systemu współrzędnych, z kątem między x i y równym 45°.

LITERATURA

1. Doliwo-Dobrowolski W. W. — O poprawkach na prielomlenije pri nachożdienii osi indikatrysy na Fedorowskom stolikie. Zapiski Wsies. Minierałogicz. Obszcz., cz. 86, wyp. 1, 1957.
2. Doliwo-Dobrowolski W. W. — O poprawkach na prielomlenije pri nachożdienii osiej indikatrysy na Fedorowskom stolikie II. Ibidem, wyp. 2, 1965.
3. Fiedorow J. S. — Tieodolitnyj mietod w minierałogii i pietrografii, cz. II. Trudy Gieołkoma, 1893, t. 10, nr 2.
4. Fiedorow J. S. — Uniwiersalnyj mietod i izuczenije polewych szpatow. „Uniw. stolik J. S. Fiedorowa". Izd. AN SSSR, 1953.
5. Kamb W. B. — Refraction corrections for universal stage measurements I. Uniaxial crystals Amer. Miner., 1962, 47, no. 3—4.
6. Niewskij B. A. — Mietodika postrojenija nomogramm ONTJ. 1937.

SUMMARY

On the basis of the paper by W. W. Doliwo-Dobrowolski (Zapiski Wsiesojuz. Minieral. Obszcz., 1965, no. 2) the author discusses corrections for the magnitude of light rafraction, which have to be introduced when the orientation of indicatrise axis is being established with the use of Fiodorow table. The corrections differ in magnitude and sign in the case of uniaxial crystals. They depend on two possible cases of orientation of indicatrise axis in relation to the axis of Fiodorow table. The formulae and nomograms facilitating calculations of the values Ho are given.

РЕЗЮМЕ

Основываясь на статье В. В. Доливо-Добровольского (Зап. Всес. мин. общ., 1965, № 2), автор анализирует поправки на величину коэффицентов преломления света при определении положения оси индикатрисы с помощью столика Федорова. В одноосных кристаллах они различны как по величине, так и по знаку, зависят от двух возможных случаев ориентировки оси индикатрисы по отношению к оси столика Федорова. Автор статьи приводит формулы и номограммы, позволяющие определять величину Но.