

MOŻLIWOŚĆ ZASTOSOWANIA KRIGINGU W WARUNKACH ŚLĄSKO-KRAKOWSKICH ZŁOŻ CYNKOWO-OŁOWIOWYCH

UKD 553.444.048:519.21(438-11)

Prawidłowa ocena średniej zawartości metalu w złożu rozciętym wyrobiskami górniczymi ma podstawowe znaczenie z punktu widzenia szacowania jego zasobów. Parametr ten jest jednym z elementów wzrostu na wielkość zasobów, stąd dokładność jego oceny wpływa bezpośrednio na dokładność oceny zasobów. Tradycyjnie już do tego celu wykorzystuje się metody statystyczne. Na etapie prac górniczych, ocena taka sprowadza się do obliczenia średniej arytmetycznej z zawartości metalu, stwierdzonych w próbkach pobranych wokół przewidzianego do eksploatacji fragmentu złoża. Dla oszacowania możliwych wahań oceny średniej zawartości określa się średnie odchylenie standardowe od średniej i na jego podstawie, przy zadanym poziomie istotności — przedziały ufności dla wartości średniej.

Postępowanie takie jest metodycznie uzasadnione o ile zawartości metalu w próbkach można traktować jako zmienne losowe wzajemnie niezależne. Założenie takie w przypadku śląsko-krakowskich złóż cynkowo-ołowiowych jest często zbyt dużym uproszczeniem, gdyż zarówno zawartości cynku, jak i ołowiu są na ogół silnie autokorelowane (5, 4). W tych warunkach prosta średnia arytmetyczna nie jest najlepszą oceną nieznaną, rzeczywistej średniej zawartości metalu. Poza tym stosowanie średniej arytmetycznej jest jednoznaczne z przypisaniem każdej próbce jednakowej wagi, gdy próbki pobrane w pobliżu naroży bloku eksploatacyjnego nie tylko powtarzają informację, lecz również jako najbardziej oddalone od geometrycznego centrum bloku wnoszą mniej istotne dane o zawartości metalu w badanej części złoża. Wynika stąd potrzeba różnicowania wartości współczynników wagowych zależnie od miejsca pobrania próbki. Ponadto, statystyczny błąd oceny średniej zawartości nie uwzględnia formy i wielkości bloku, na który rozciąga się wyniki opróbowań z wyrobisk oraz autokorelacji zawartości metali.

GEOSTATYSTYCZNA OCENA ZMIENNOŚCI PARAMETRÓW ZŁOŻOWYCH

Wspomniane we wstępie niedostatki statystycznego opisu złoża przyczyniły się do wypracowania wielu nowych metod jego oceny. Jedną z ciekawszych propozycji w tym zakresie jest tzw. kriging stanowiący nową procedurę szacowania średnich wartości parametrów złożowych przy wykorzystaniu informacji o ich autokorelacji (3). Termin ten pochodzi od nazwiska D. Krige'a, który jako pierwszy podał ideę metody i zastosował ją do oceny zawartości złota w złożach południowej Afryki (1951 r.).

Procedura krigingu oparta jest ściśle na charakterystyce zmienności przedstawionej za pomocą wariogramu, tj. funkcji ilustrującej zróżnicowanie wartości parametru zależnie od odległości między punktami jego pomiaru. Dla dyskretnej i regularnej sieci opróbowań, w warunkach izotropowego rozmieszczenia metalu, wariogram zdefiniowany jest wzorem:

$$2\gamma(h) = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} [f(X_i+h) - f(X_i)]^2$$

gdzie:

$f(X_i+h)$, $f(X_i)$ — wartości parametru w punktach oddalonych o h ,
 n_h — ilość par pomiarów w punktach oddalonych o h .

Na ogół wariogramy dla danych empirycznych mogą być wyrażone z dokładnością wystarczającą w praktycznych zastosowaniach za pomocą prostych

funkcji analitycznych, traktowanych wówczas jako geostatystyczne modele zmienności (ryc. 1). Gdy rozmieszczenie metalu w złożu jest losowe, punkty wariogramu empirycznego grupują się wokół prostej poziomej, której rzędna odpowiada podwojonej wariancji statystycznej. Spośród przedstawionych na ryc. 1 modeli zmienności, na szczególną uwagę zasługują model de Wijsa, ponieważ oddaje zadowalająco zróżnicowanie zawartości cynku i ołowiu w złożach śląsko-krakowskich (4). Przydatność modelu wynika także z tego, że parametry niezbędne do oceny średniej zawartości i błędu tej oceny w procedurze krigingu można odczytać bezpośrednio z tablic zamieszczonych w pracy G. Matherona (3), co znacznie ułatwia obliczenia. Model de Wijsa charakteryzuje wariogram opisany wzorem:

$$2\gamma(h) = 13,8a \cdot \log h + c$$

gdzie:

a — współczynnik absolutnego rozproszenia,
 c — stała.

W modelu de Wijsa, miarą bezwzględnego zróżnicowania badanego parametru, niezależną od wielkości próbek jest współczynnik absolutnego rozproszenia a . Wartość współczynnika a można określić z wykresu wariogramu sporządzonego w układzie półlogarytmicznym. Wykres ten jest wówczas linią prostą ze współczynnikiem kierunkowym równym $13,8a$.

PROCEDURA KRIGINGU

Istota krigingu polega na przypisaniu próbkom takich współczynników wagowych, które zapewniają najdokładniejszą ocenę nieznaną, rzeczywistej zawartości metalu. Estymator Z^* nieznaną zawartości Z w dowolnym punkcie badanego fragmentu złoża ma postać:

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f(x_i)$$

gdzie:

$f(x_i)$ — zawartość metalu w próbce X_i ,
 a_i — współczynnik wagowy przypisany próbce X_i ,
 n — liczba próbek.

Nieznanne wartości współczynników a_i określa się na podstawie dwu postulatów:

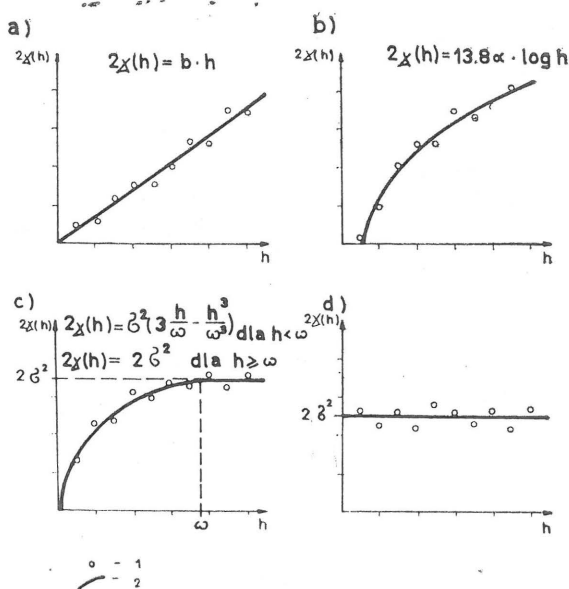
1) postulat nieobciążoności estymatora Z , co jest jednoznaczne z wymaganiami, aby suma wartości współczynników wagowych równała się jedności:

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1$$

2) postulat minimalizacji wariancji wyrażenia $(Z-Z^*)$, co można zapisać: $\text{Var}(Z-Z^*) = \min$. Spełnianie powyższych warunków prowadzi do układu równań, którego rozwiązaniem są wartości a_i (1):

$$\sum_{i=1}^n a_j \cdot \gamma(X_i - X_j) = \gamma(Z_0 - X_i) + \lambda$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1$$

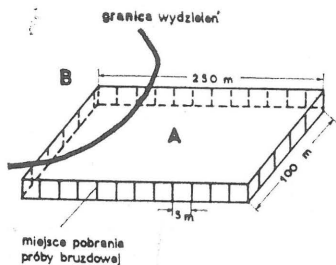


Ryc. 1. Geostatystyczne modele zmienności.

a — liniowy, b — de Wijsa, c — sferyczny, d — losowy. 1 — punkt wariogramu empirycznego, 2 — model teoretyczny, b — współczynnik kierunkowy prostej, α — współczynnik absolutnego rozproszenia, ω — zasięg korelacji, C^2 — wariancja statystyczna.

Fig. 1. Geostatistical variability models.

a — linear, b — de Wijs, c — spherical, d — random. 1 — point of empirical variogram, 2 — theoretical model. b — directional coefficient of straight, α — absolute dispersion coefficient, ω — range of correlation, C^2 — statistical variance.



Ryc. 3. Schemat rozmieszczenia próbek i zasięgu wyróżnionych mineralizacji kruszczowych w ocenianym fragmencie złoża.

A — ławice blendowe o teksturach ziemistych, B — żyły galenowe w rozpyliwym dolomiecie.

Fig. 3. Scheme of distribution of samples and extent of ore mineralization types differentiated in the analysed part of deposit.

A — layers of blende with earthy texture, B — galena veins in brittle dolomite.

gdzie:

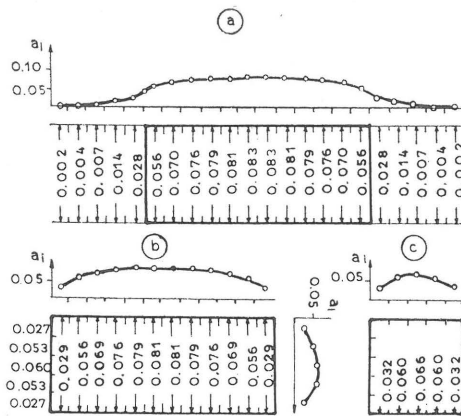
- $\gamma(x_i - x_j)$ — połowa wartości wariogramu dla odległości między próbkami x_i i x_j ,
- $\gamma(x_0 - x_i)$ — połowa wartości wariogramu dla odległości między próbką X_i i punktem złoża, w którym szacuje się zawartość metalu (Z_0),
- λ — mnożnik Lagrange'a.

Błąd oceny zawartości określonej zgodnie z przedstawioną procedurą wyraża się wzorem (1):

$$\sigma_k^2(Z) = \lambda + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \gamma(X_i - Z_0)$$

Symbole użyte w tym wzorze mają identyczne znaczenie, jak we wzorze poprzednim.

Kriging punktowy może służyć jako optymalna procedura interpolacyjna, ale w tej postaci nie jest jeszcze przydatny do szacowania średniej zawartości

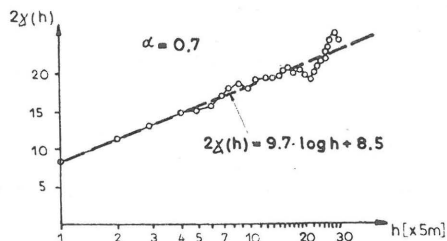


Ryc. 2. Sieć współczynników wagowych krigingu dla bloku rozpoznanego:

a — dwoma wyrobiskami z uwzględnieniem próbek pobranych poza blokiem, b — czterema wyrobiskami przylegającymi do bloku o formie prostokąta, c — czterema wyrobiskami ograniczającymi blok kwadratowy.

Fig. 2. Net of weight coefficients of kriging for a block recognized by:

a — two mining works, also taking into account samples gathered beyond the block, b — four mining works adjoining block rectangular in outline, c — four mining works delineating square block.



Ryc. 4. Wariogram zawartości cynku dla wszystkich danych z badanego rejonu złoża.

Fig. 4. Variogramme of zinc content for all the data from the analysed part of deposit.

metal w badanym fragmencie złoża. Korzystając z zasady superpozycji współczynników wagowych, zakres stosowalności tej procedury można rozszerzyć na cały oceniany blok eksploatacyjny. Współczynniki wagowe dla tego wariantu krigingu, zwanego krigingiem ciągłym, podaje w swej pracy G. Matheron (3, str. 158—168). Przykładowo na ryc. 2 przedstawiono sieć współczynników krigingu ciągłego dla próbek pobranych w dwóch i czterech wyrobiskach ograniczających fragment złoża o formie prostokąta. Tak jak to pokazuje wykres, najwyższe wagi przyporządkowane są próbką pobraną najbliższej geometrycznego środka bloku.

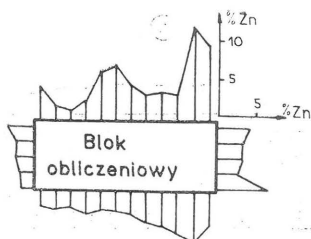
Istnieje również uproszczony, dyskretny wariant krigingu. W wariancie tym wyrobiska górnicze traktuje się jako samodzielne elementy wpływające na ocenę średniej zawartości metalu, w wyznaczonym przez nie fragmencie złoża, poprzez średnie wartości parametru wyznaczone w ich obrębie. Metoda ta sprowadza się do przypisania właściwych wag nie poszczególnym próbkom, lecz całym wyrobiskom.

Ocena nieznannej, rzeczywistej, średniej zawartości metalu Z w bloku ma wówczas postać:

$$Z^* = \bar{x}_l \cdot a + \bar{x}_h \cdot (1 - a)$$

gdzie:

- \bar{x}_l, \bar{x}_h — średnie zawartości metalu odpowiednio w dłuższych i krótszych wyrobiskach,
- a — współczynnik wagowy przypisywany dłuższemu wyrobiskom.



Ryc. 5. Zmienność zawartości procentowej cynku w wyrobiskach otaczających blok eksploatacyjny.
Fig. 5. Variability in percentage of zinc in mining works surrounding exploitation block.

Współczynnik a wyznacza się na identycznych zasadach, jak w wariancie punktowym krigingu. Jego wartość jest funkcją stosunku długości prostopadłych wyrobisk: $a = f\left(\frac{h}{l}\right)$. Podobnie, błąd krigingu dyskretnego można określić jako funkcję stosunku długości wyrobisk i wartości współczynnika absolutnego rozproszenia $a \cdot \sigma_{KD}^2 = 3a \cdot f\left(\frac{h}{l}\right)$.

Funkcje te podane są w formie tabelic w pracy G. Matherona (3, str. 118). Dokładność wariantu dyskretnego jest nieco niższa od dokładności wariantu ciągłego, zaletą natomiast — znaczne uproszczenie niezbędnych obliczeń.

OCENA FRAGMENTU ZŁOŻA Zn-Pb KOPALNI „TRZEBIONKA”

Opisaną metodę krigingu ciągłego i dyskretnego oraz tradycyjną metodę statystyczną zastosowano do oceny średniej zawartości cynku w wybranym fragmencie złoża kopalni „Trzebionka”. Badany fragment złoża, wyznaczony przez wyrobiska górnicze, ma w planie kształt prostokąta o wymiarach 250 × 100 m (ryc. 3). Miąższość złoża jest na ogół stała i wynosi 2,5 m. Wyrobiska ograniczające tę część złoża opróbowano przez pobranie próbek bruzdowych co 5 m, na przemian z obu odciosów, przez całą miąższość złoża. W rejonie tym złożo wykształcone jest w przeważającej części jako ławice blendowe o teksturach ziemistych i lokalnie jako żyły galenowe w rozsypliwym dolomicie (ryc. 3).

Zakładając, że rozmieszczenie cynku jest przynajmniej w przybliżeniu izotropowe na podstawie wyników oznaczeń zawartości cynku w próbkach obliczono wartości wariogramu empirycznego. Wykres wariogramu sporządzony w układzie półlogarytmicznym przedstawia ryc. 4. Punkty wykresu grupują się wyraźnie wokół linii prostej. Na tej podstawie przyjęto, że zróżnicowanie zawartości cynku może być opisane zadowalająco za pomocą modelu de Wijsa, ze współczynnikiem absolutnego rozproszenia $a = 0,7$. Tę wartość wykorzystano do określenia błędu krigingu dyskretnego. Przy danych formach geometrycznych bloku, dla stosunku długości wyrobisk równo $\frac{100 \text{ m}}{250 \text{ m}} = 0,4$ odczytana z tabelic (3) wariancja

krigingu wynosi $3a \cdot 0,167$, a uwzględniając wyliczoną wartość współczynnika a równa jest ona $\sigma_{KD}^2 = 0,35$.

Pierwiastek kwadratowy z wariancji krigingu, traktowany jako błąd oceny średniej zawartości dla tej metody, wynosi około 0,6. Ze względu na dużą pracochłonność nie określono wartości błędu krigingu ciągłego, natomiast estymator wartości średniej dla tego wariantu wyznaczono na podstawie współczynników wagowych przedstawionych na ryc. 2. W metodzie statystycznej jako ocenę wartości średniej obliczono średnią arytmetyczną \bar{X} , zaś jako miarę błędu tej oceny średnie odchylenie standardowe od średniej (S_x). Wyniki oceny fragmentu złoża podaje ryc. 6.

Zwraca uwagę istotna różnica w oszacowaniu błędu średniej zawartości, który według metody statystycznej jest dwukrotnie niższy od błędu krigingu dyskretnego i wynosi około 6% wartości średniej.

Metoda	Ocena średniej zawartości Zn	Błąd oceny średn. zawart.
kriging-wariant ciągły	$Z_C^* = 3,7\%$	—
kriging-wariant dyskretny	$Z_D^* = 3,9\%$	0,6
statystyczna	$\bar{x} = 3,8\%$	0,3

Ryc. 6. Wyniki oceny średniej zawartości cynku w wybranym fragmencie złoża przy zastosowaniu różnych metod.

Fig. 6. Results of estimations of mean zinc content in selected part of deposit with the use of various methods.

Można sądzić, że metoda statystyczna zbyt nisko szacuje ten błąd i w rzeczywistości należy się liczyć z tym, że w omawianym przypadku może on sięgać 16%, jak wskazuje na to błąd krigingu dyskretnego.

Obliczone estymatory wartości średniej nie różnią się istotnie od siebie. Najniższe oszacowanie średniej zawartości cynku daje wariant ciągły krigingu. Przyczynę tego można łatwo wyjaśnić śledząc wyniki oznaczeń w wyrobiskach (ryc. 5). Okazuje się bowiem, że najbogatsza mineralizacja cynkowa skoncentrowana jest w pobliżu naroży bloku, a więc w próbkach którym zgodnie z przyjętą procedurą przyporządkowuje się najniższe wagi. Najwyższe oszacowanie średniej zawartości daje wariant dyskretny krigingu. Stanowi to bezpośrednią konsekwencję przypisania dłuższym wyrobiskom (o wyraźnie wyższych zawartościach cynku niż w wyrobiskach krótszych) nieco większej wagi ($a = 0,835$), niż wynikałoby to z ich udziału w obwodzie bloku wynoszącym 0,714.

Biorąc pod uwagę cechy wariantu ciągłego, który uwzględnia nie tylko geometrię bloku, lecz również położenie miejsc pomiarów i autokorelację zawartości metalu w próbkach, można przypuszczać, że daje on oszacowanie najbardziej zbliżone do rzeczywistej średniej zawartości. Jako miarę błędu oceny średniej zawartości można przyjąć błąd krigingu dyskretnego ze względu na łatwość określenia jego wartości.

ZAKOŃCZENIE

Metoda szacowania średniej zawartości metali w złożu za pomocą krigingu może być polecana do zastosowania w warunkach śląsko-krakowskich złóż cynkowo-olowiowych, co wynika z silnej autokorelacji oznaczeń zawartości metali w próbkach. W złożach tych prawidłowości zróżnicowania zawartości cynku i ołowiu ujmuje zadowalająco model de Wijsa. Fakt ten podkreśla dodatkowo przydatność procedury krigingu, gdyż niezbędne do jej przeprowadzenia parametry w przypadku modelu zmienności de Wijsa można odczytać dla danych form geometrycznych bloku bezpośrednio z tabelic (3). Z dwóch przedstawionych wariantów krigingu do oceny średniej zawartości metalu bardziej przydatny jest wariant ciągły, ponieważ uwzględnia w sposób bardziej pełny niż wariant dyskretny cechy geometryczne bloku i sieci opróbowań. Jako miarę błędu oceny średniej zawartości można przyjąć błąd krigingu dyskretnego ze względu na łatwość określenia jego wartości. Metoda statystyczna może w tym wypadku zaniżyć wielkość błędu możliwego do popelnienia przy ocenie fragmentu złoża.

LITERATURA

1. Davis J. C. — Statistika i analiz geologicznych danych. Moskwa, Wyd. „Mir” 1977.
2. Krige D. G. — A statistical approach to some basic valuation problems on the Witwatersrand. J. of the Chem. and Min. Soc. of S. Afric, 1951, 52.
3. Matheron G. — Traité de géostatistique appliquée, Mémoires du Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Paris, t. I — 1962, t. II — 1963.
4. Mucha J. — Geostatystyczny opis zmienności Zn-Pb na przykładzie fragmentu złoża kopalni „Bolesław”, Techn. Posz. Geol. 1978 z. 5.
5. Zubrzycki S. — O szacowaniu parametrów złóż geologicznych. Zastosowania matematyki, 1957, t. III, z. 2.

SUMMARY

Shortcomings of statistical method of estimation of a deposit are discussed and a procedure of estimating mean value of deposit parameter, known as kriging, is presented. This procedure was used to estimate mean content of metal in a selected part of the „Trzebionka” deposit (Table I).

The procedure appeared fully applicable for zinc-lead deposits of the Silesian-Cracow region. It also appeared that the statistical method underestimates error in calculations of mean content of metal.

РЕЗЮМЕ

В статье обращено внимание на недостатки статистического метода оценки месторождения и представлена процедура расценки средней величины пластового параметра, называемая кригингом. Процедура кригинга была применена для оценки среднего содержания металла в части месторождения „Тшебёнка” (таб. I). Автор констатирует, что описываемый метод является пригодным для применения в условиях силезско-краковских цинковосвинцовых месторождений, а статистическая расценка ошибки среднего содержания металла является заниженной.