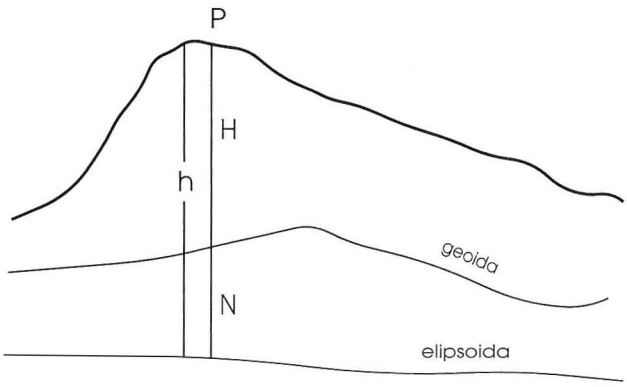
Nowa metoda szybkiego wyznaczania wysokości w pracach poszukiwawczych

Adam Łyszkowicz*

1. **Niwelacja *GPS*.** Znajomość wysokości punktu nad poziomem morza jest niezbędna w wielu dziedzinach, związanych z tworzeniem mapy i w geologiczno-geofizycznych pracach poszukiwawczych. Obecnie, klasyczna metoda niwelacji geometrycznej jest z powodzeniem zastępowana przez nową metodę zwaną „niwelacją *GPS*", która wykorzystuje Globalny System Pozycyjny *GPS* (*Global Positioning System)* i geoidę. Geoida — powierzchnia ekwipotencjalna pola siły ciężkości Ziemi — pokrywa się ze średnim poziomem mórz i oceanów i jest przyjmowana za powierzchnię odniesienia, dla pomiarów wysokościowych. Wysokość punktu P (ryc. 1) jest definiowana jako



Ryc. 1. Zależność między wysokością geoidy (*N*), wysokością elipsoidalną (*h*), a wysokością nad średnim poziomem morza

odległość między geoidą a punktem P, na fizycznej powierzchni Ziemi i jest liczona wzdłuż zakrzywionej lini pionu. Z pomiarów *GPS* można otrzymać współrzędne *X,Y,Z* punktu P, w kartezjańskim geocentrycznym układzie odniesienia [7]. Ziemia ze znacznym stopniem dokładności może być aproksymowana przez elipsoidę obrotową [5], którą można wykorzystać do przeliczenia prostokątnych współrzędnych *X,Y,Z* punktu P, na szerokość i długość geograficzną ψ i λ oraz wysokość elipsoidalną *h*. Odstęp geoidy od elipsoidy jest wysokością geoidy, względem elipsoidy odniesienia. Z ryc. 1 wynika, że

$$H = h - N \tag{1}$$

a w przypadku względnych pomiarów *GPS* uzyskujemy Δh różnicę wysokości elipsoidalnych między mierzonymi punktami i wówczas wzór (1) przyjmuje postać:

$$\Delta H = \Delta h - \Delta N \tag{2}$$

Z wyników pomiarów *GPS* uzyskujemy tylko *h* lub Δh. W celu zamiany tych elipsoidalnych wielkości, na wysokości mające znaczenie fizyczne, odstęp geoidy *N* lub różnica ΔN muszą być obliczone z danych grawimetrycznych. Jeśli tego nie dokonamy, to błąd z tego tytułu może osiągnąć rząd kilkudziesięciu metrów. W celu uzyskania różnicy wysokości ΔH , z dokładnością tego samego rzędu, co dokładność czynnika Δh, składnik ΔN musi być wyznaczony z tą samą precyzją.

Typowa dokładność pomiarów *GPS*, przy odległościach *D* mniejszych od 100 km, jest rzędu $1\text{–}2\cdot 10^{-6}D$. Liczne badania wskazują, że ΔN może być uzyskane również z tą samą dokładnością. Tak więc, dokładność wyznaczenia różnicy wysokości ΔH rzędu $1\text{–}2\cdot 10^{-6}D$ jest również możliwa. Niwelacja *GPS* jest więc konkurencyjną (znacznie szybszą i tańszą) alternatywą, w stosunku do tradycyjnej niwelacji geometrycznej.

Jeśli kontrolne punkty, o znanych wysokościach, na których wykonano obserwacje *GPS* są oddalone od siebie nie więcej niż 5–10 km i jeśli obszar jest równinny, to geoida w wielu przypadkach może być aproksymowana przez płaszczyznę [1] i nie ma potrzeby liczenia jej z danych grawimetrycznych. W tym przypadku, za różnicę wysokości ΔH można przyjąć różnicę Δh, uzyskaną z pomiarów *GPS*. Dokładność tak obliczonej różnicy ΔH będzie rzędu 1–3 cm, przy odległościach mniejszych od 10 km. Należy być bardzo ostrożnym przy wyborze dostatecznej liczby punktów kontrolnych, aby hipoteza „płaskiej" geoidy była możliwa do przyjęcia. Na obszarach górzystych zawsze konieczna jest znajoność lokalnej geoidy, jak również niezbędne jest staranne modelowanie wpływu topografii. W pracach mierniczych, obejmujących duże obszary, wymagana jest względna dokładność ok. 1 cm na 10 km ($1\cdot 10^{-6}\,D$). Wówczas dane o przebiegu geoidy muszą być uwzględnione, nawet w przypadku, gdy obszar jest równinny.

2. Geoida grawimetryczna. Precyzyjne odstępy geoidy od elipsoidy są obliczane z danych grawimetrycznych. Numeryczne całkowanie anomalii wolnopowietrznych (poprawionych o wpływ topografii terenu), według wzoru Stokesa, dostarcza informacji o lokalnym przebiegu geoidy. Globalne informacje o przebiegu geoidy są uzyskiwane ze wzoru, wyrażającego odstęp *N*, w postaci rozwinięcia w szereg funkcji kulistych, o współczynnikach zaczerpniętych z istniejących globalnych modeli pola siły ciężkości. Jeśli prace poszukiwawcze są prowadzone na obszarach, gdzie nie dysponujemy żadnymi danymi grawimetrycznymi, wówczas korzysta się tylko z geopotencjalnych modeli, które nie zapewniają wysokiej dokładności wyznaczenia przebiegu geoidy.

Obliczanie odstępów geoidy *N,* przez połączenie informacji pochodzących z modelu geopotencjalnego (GM), średnich anomalii wolnopowietrznych Δg i wysokości *H* z numerycznego modelu terenu (NMT) — jest oparte na zależności:

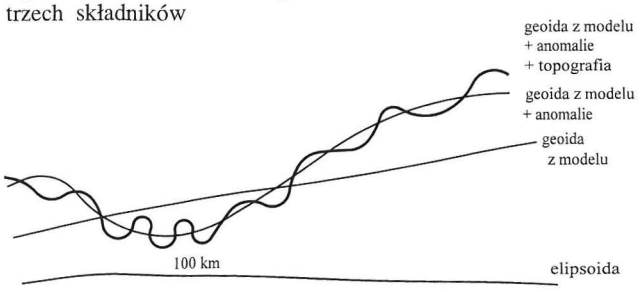
$$N = N_{GM} + N_{\Delta g} + N_H \tag{3}$$

$$\Delta g = \Delta g_{FA} - \Delta g_{GM} - \Delta g_H \tag{4}$$

Chociaż undulacje geoidy są bardziej wrażliwe na niskie i średnie zakresy widma pola siły ciężkości, to w górzystych terenach wszystkie trzy zakresy widma (trzy źródła danych) są niezbędne, w celu właściwego oszacowania przebiegu geoidy. Należy zwrócić uwagę, że z anomalii grawimetrycznych, użytych do obliczenia $N_{\Delta g}$, usu-

*Centrum Badań Kosmicznych PAN, ul. Bartycka 18A, 00-716 Warszawa

Ryc. 2. Geoida ostateczna jako suma trzech składników



nięto , wpływ topografii i wpływ modelu geopotencjalnego. W ten sposób rozdzielono długo-, średnio- i krótkofalowe partie widma pola siły ciężkości (ryc. 2).

Odstęp geoidy od elipsoidy, wynikający z modelu geopotencjalnego i anomalii grawimetrycznych w rozwinięciu w szereg funkcji kulistych, ma postać [6]:

$$N_{\Delta g} = G \sum_{n=2}^{n_{max}} (n-1) \sum_{m=0}^{n} (C_{nm} cosm\,\lambda + S_{nm} sinm\lambda) P_{nm}(sin\varphi) \tag{5}$$

$$N_{GM} = R \sum_{n=2n}^{n_{max}} \sum_{m=2}^{n} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(sin\varphi) \tag{6}$$

gdzie: C_{nm}, S_{nm} są to normowane współczynniki harmoniczne rozwinięcia w szereg potencjału zakłócającego, P_{mn} są to normowane funkcje Legendre'a, a n jest maksymalnym stopniem rozwinięcia modelu geopotencjalnego, G jest średnim przyspieszeniem siły ciężkości, R jest średnim promieniem Ziemi, a ϕ i λ geocentryczną szerokością i długością. $N_{\Delta g}$ jest liczone ze wzoru Stokesa, który w przypadku przyjęcia obszaru E za płaszczyznę ma postać:

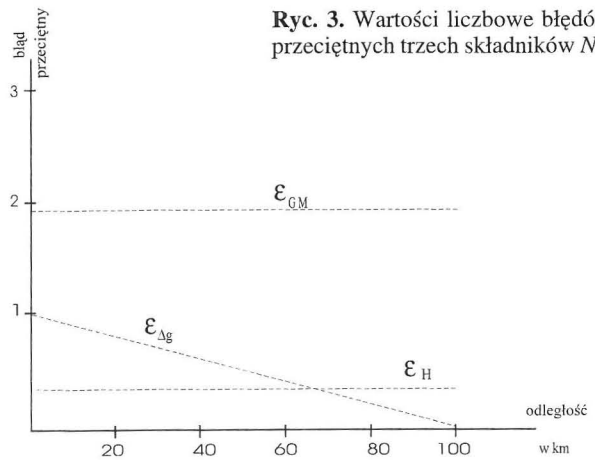
$$N_{\Delta g}(x_p y_p) = \frac{1}{2\pi G} \iint_E \frac{\Delta_g(x,y)}{l} dxdy \tag{7}$$

gdzie: l jest odległością między dowolnym punktem (x, y), a punktem (x_p, y_p), w którym liczony jest odstęp N. Całka ta, zwana całką konwolucji, jest liczona w przestrzeni częstotliwości [9], za pomocą szybkiej transformaty Fouriera (FFT).

$$N_{\Delta g}(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi G} F^{-1} \frac{\Delta G(u,v)}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \tag{8}$$

gdzie: u, v są to częstotliwości odpowiadające x, y, $\Delta G(u,v)$ jest widmem anomalii grawimetrycznych, a F^{-1} oznacza odwrotny operator transformaty Fouriera. Metoda ta korzysta ze średnich lub punktowych danych grawimetrycznych, wyznaczonych w węzłach siatki i oblicza odstępy geoidy od elipsoidy jednocześnie we wszystkich punktach. W ten sposób geoida może być w szybki i tani sposób obliczona na dużym obszarze. W celu uzyskania odstępu geoidy od elipsoidy w dowolnym punkcie obszaru należy wykonać stosowną interpolację. Metoda FFT jest najszybszą ze wszystkich obecnie dostępnych metod i stosowana jest również w przypadku przyjęcia Ziemi za powierzchnię kulistą.

Ryc. 3. Wartości liczbowe błędów przeciętnych trzech składników N



Wyznaczenia przebiegu geoidy na danym obszarze można również zrealizować metodą kolokacji najmniejszych kwadratów (*least square collocation, lsc*). Metoda ta wymaga rozwiązania układu równań liniowych, o liczbie równej liczbie obserwacji [5]. Odstęp geoidy od elipsoidy N_p jest liczony z obserwacji x według zależności:

$$N_p = C_{Nx}(C_{xx} + C_{ee})^{-1} x \tag{9}$$

gdzie: C_{Nx} jest macierzą kowariancji, pomiędzy sygnałem a obserwacją x, C_{xx} jest macierzą kowariancji sygnału obserwacji x, a C_{ee} jest macierzą kowariancji błędu obserwacji. Zaletą tej metody jest jej zdolność włączenia do obliczeń różnych typów danych. Na przykład, wektor x może zawierać jako obserwacje: anomalie grawimetryczne Δg, składowe odchyleń pionu ξ i η. Wadą tej metody jest konieczność rozwiązania dużego układu równań liniowych, co w praktyce często prowadzi do ograniczenia liczby dostępnych danych, jak również do ograniczenia rozmiarów obszaru liczenia geoidy.

Wzór Stokesa i metoda *lsc* są wyprowadzone przy założeniu, że Δg odnosi się do geoidy. Oznacza to, że wszystkie masy topograficzne jakie występują ponad geoidą, muszą być usunięte metodą rachunkową (matematycznie przesunięte pod geoidę), co uzyskuje się poprzez liczenie poprawek topograficznych. Obliczenie poprawki topograficznej Δg_H, umożliwia, z jednej strony przeprowadzenie znacznie dokładniejszej interpolacji Δg, z drugiej strony zaś umożliwia określenie wyrazu N_H. Wyraz ten, we wzorze (3), jest zwany efektem pośrednim geoidy i wynika ze zmiany powierzchni ekwipotencjalnej, wywołanej przesunięciem mas topograficznych pod geoidę, czyli wprowadzeniem redukcji topograficznej do Δg. Wykorzystując redukcję kondensacji Helmerta [2] mamy:

$$-\Delta g_H(x_p, y_p) = \frac{1}{2} k\rho \iint_E \frac{(\Delta H)^2}{l^3} dxdy \tag{10}$$

$$N_H(x_p, y_p) = -\frac{\pi k \rho}{G} [\Delta H(x_p, y_p)]^2 \tag{11}$$

gdzie: k jest stałą grawitacji, $\Delta H = H(x,y) - H(x_p, y_p)$, a ρ jest gęstością mas topograficznych.

3. Uzyskiwane dokładności. Zazwyczaj precyzyjne wyznaczenie pozycji z obserwacji *GPS* uzyskuje się z względnych wyznaczeń, dlatego też w niniejszych rozważaniach zajmiemy się dokładnościami względnych wyznaczeń geoidy. W praktyce, procedura niwelacji *GPS* polega na wyznaczeniu Δh z obserwacji *GPS*, obliczeniu ΔN z danych grawimetrycznych, a następnie obliczeniu ΔH ze wzoru (2). Jeśli na rozważanym obszarze znajduje się co najmniej jeden punkt, (reper) o znanej wysokości nad średnim poziomem morza — powiedzmy o wysokości H_o — to wysokości wszystkich pozostałych punktów wyrażą sie jako H_o plus obliczone przewyższenia ΔH.

Dokładność wyznaczenia ΔN zależy od dokładności obliczenia wszystkich trzech składników, podanych w równaniu (3). Współczynniki, występujące w rozwinięciu geoidy w szereg funkcji kulistych, dają błędy o charakterze długofalowym, których nie można zmniejszyć przez włączenie do obliczeń liczniejszych danych grawimetrycznych z najbliższego otoczenia wyznaczanego punktu. Błąd wyznaczenia N zależy od wielkości obszaru, liczebności i dokładności lokalnych danych grawimetrycznych. Zatem użycie średnich anomalii reprezentujących bloki powierzchni o wymiarach nie większych niż 2 km x 2 km powinno zminimalizować ten błąd.

Z przeprowadzonych analiz wynika, że wartości liczbowe przeciętnego błędu ε (w milionowych częściach) dla każdego z trzech składników są takie, jak podano na ryc. 3, z którego wynika, że najbardziej znaczącym błędem obarczona jest składowa liczona z modelu geopotencjalnego. Wartość tego błędu jest prawie stała i dominuje nad pozostałymi błędami. Dwa pozostałe błędy przyjmują raczej niewielkie wartości liczbowe, i jak stwierdzono wcześniej, mogą być w znacznym stopniu zredukowane, poprzez użycie większej liczby lokalnych danych grawimetrycznych i wysokościowych.

W celu uzyskania błędu względnego poniżej $2 \cdot 10^{-6}$, Δg i H muszą być dane w węzłach siatki geograficznej o wymiarach nie większych niż 5' x 5' i 1 km x 1 km odpowiednio.

W celu zweryfikowania tezy, że niwelacja *GPS* może dostarczyć ΔH z taką samą dokładnością jak niwelacja geometryczna, przytoczymy wymagania dokładnościowe polskiej wysokościowej osnowy geodezyjnej [3] dla linii o długościach od 10 do 100 km. Wymaganą przez geodezyjne normy dokładność wyznaczenia różnicy wysokości w poszczególnych klasach osnowy wysokościowej podano w tab. 1.

Tab.1. Dokładność względna (w milionowych częściach) wyznaczenia różnicy wysokości

Rodzaj osnowy	Klasa	$m_{\Delta H}$/10 km	$m_{\Delta H}$/100 km
Podstawowa	I	0,3	0,1
	II	0,6	0,2
Szczegółowa	III	1,2	0,4
	IV	3,0	1,0
Pomiarowa		6,0	2,0

Z liczb podanych w tab. 1 wynika, że klasyczna niwelacja geometryczna może być z powodzeniem zastąpiona przez metodę niwelacji *GPS* w przypadku następujących osnów wysokościowych: szczegółowej IV klasy i osnowy pomiarowej.

Duże zainteresowanie systemem *GPS* zaowocowało szybkim rozwojem metod wyznaczania pozycji z coraz to wyższą dokładnością. Jednocześnie trwają intensywne prace nad badaniem pola siły ciężkości (geoidy). Tak więc niwelacja *GPS* (pozycja z *GPS* + geoida) wkrótce zastąpi niwelację geometryczną w wielu praktycznych zastosowaniach.

Tab. 2. Dokładność wyznaczenia ΔN (w milionowych częściach)

Ukształtowanie terenu	Geoida z modelu	Geoida z modelu + anomalie	Geoida z modelu + anomalie + topografia
Równinny	5–7	1–3	1–3
Górzysty	6–9	3–5	1–3

Analiza dokładności różnych sieci *GPS* [8, 4], prowadzi do następujących ocen dokładnościowych, wyznaczania różnic udulacji geoidy (p. tab. 2). Liczby podane w powyższej tabeli upoważniają do stwierdzenia, że nawet w przypadku obszarów równinnych, użycie tylko modelu geopotencjalnego nie jest wystarczające w celu dokładnego wyznaczenia ΔN. Wynika to ze znanego faktu, że współczynniki modelu pola (szczególnie niskiego stopnia i rzędu) są wyznaczane ze zbyt małą dokładnością. Użycie dodatkowo lokalnych danych grawimetrycznych w istotny sposób poprawia dokładność wyznaczenia geoidy. Na obszarach górzystych wymagane są dodatkowe dane, a mianowicie — informacje o topografii terenu (numeryczny model terenu).

W celu podniesienia dokładności wyznaczenia ΔN do poziomu $1 \cdot 10^{-6}$ należy:

1) podnieść dokładność wyznaczenia współczynników modelu pola,

2) dysponować lokalnymi danymi grawimetrycznymi w węzłach siatki 2 km x 2 km,

3) numeryczny model terenu dla obszarów górzystych powinien być w postaci średnich wysokości dla obszarów o wymiarach 1 km x 1 km a nawet mniejszych.

W celu uzyskania ΔH na poziomie $1 \cdot 10^{-6}$ wymagany jest również dalszy wzrost dokładności, zarówno instrumentów jak i metod opracowywania obserwacji *GPS*.

4. Konkluzje. Obecnie względna dokładność różnicy wysokości uzyskiwana z niwelacji *GPS* jest na poziomie kilku milionowych części przy długościach linii niwelacyjnych do 100 km. Zasadniczy błąd wyznaczenia wysokości metodą *GPS* jest wywołany błędami wyznaczenia współczynników modelu geopotencjalnego. W celu uzyskania precyzyjnej geoidy konieczne jest użycie lokalnych danych grawimetrycznych i topograficznych. Praktyczne obliczenie geoidy może być zrealizowane na komputerze typu *PC* przez użycie bardzo efektywnej FFT metody. Obecnie sieci niwelacji szczegółowej (IV klasy), osnowa pomiarowa oraz osnowa wysokościowa dla celów poszukiwań geologiczno-geofizycznych może być realizowana w szybki i ekonomiczny sposób metodą niwelacji *GPS*.

Niniejsza praca została wykonana w ramach grantu KBN nr S60501404 „Problemy oceny dokładności przebiegu geoidy wyznaczonej metodą kolokacyjno-całkową przy zastosowaniu metody *Fast Fourier Transform (FFT)*".

Literatura

1 HAJELA D.,1990 — GPS World, Jan/Feb. 55–59.
2 HEISKANEN W.A., MORITZ H., 1967 — Physical Geodesy, W.H. Freeman and Company, San Francisco.
3 Instrukcja Techniczna, G-2,1986 — Wysokościowa osnowa geodezyjna, Główny Urząd Geodezji i Kartografii, Warszawa.
4 ŁYSZKOWICZ A.,1993 — Artificial Satellites, Planetary Geodesy 28:75–150.
5 MORITZ H.,1980 — Advanced Physical Geodesy, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
6 RAPP R.H., PAVLIS N.K., 1990 — J. of Geophysical Research, 95: 21885–21911
7 SEEBER G.,1993 — Satellite Geodesy, Walter de Gruyter, Berlin, New York.
8 SCHWARZ K.P., SIDERIS M.G. , FORSBERG R.,1987 — J. of Surveying Engineering, 113.
9 SCHWARZ K.P., SIDERIS M.G. , FORSBERG R.,1990 — Geophysical J. Int, 100 : 485–514.