

Nowa grawimetryczna geoida dla obszaru Polski

Adam Łyszkowicz*

Pierwsze wyznaczenie astro-grawimetrycznej geoidy dla obszaru Polski zostało zrealizowane w Instytucie Geodezji i Kartografii w 1961 r. (Bokun, 1961). Zagęszczenie w latach sześćdziesiątych sieci triangulacyjnej kraju umożliwiło wyznaczenie drugiej (w 1970 r.) i trzeciej (w 1978 r.) wersji astro-grawimetrycznej geoidy na terytorium Polski. Rozdzielczość ostatniej wersji astro-grawimetrycznej geoidy jest rzędu ok. 20 km, a dokładność względna wyznaczenia N jest szacowana na ok. 60 cm/100 km.

Obecnie wymagania — dotyczące dokładności wyznaczenia geoidy — znacznie wzrosły, głównie z powodu coraz szerszego stosowania techniki GPS, która umożliwia wyznaczenie położenia punktu z dokładnością centymetrową w przestrzeni trójwymiarowej. W celu przetransformowania geometrycznych wielkości jakimi są wysokości elipsoidalne z pomiarów GPS, na wysokości odniesione do średniego poziomu morza, niezbędna jest znajomość odstępów geoidy od elipsoidy, z dokładnością porównywalną z dokładnością pomiarów GPS i dokładnością niwelacji klasycznej, która jest rzędu kilku cm/100 km i ok. dm/1000 km.

W celu wyznaczenia geoidy na takim poziomie dokładności, niezbędne jest posiadanie danych grawimetrycznych i wysokości topograficznych jako wartości uśrednionych dla bloków mniejszych niż 10 km. Pierwsza grawimetryczna geoida dla obszaru Polski obliczona metodą kolokacyjno-całkową (Łyszkowicz, 1993) bazowała na ok. 6000 średnich anomalii grawimetrycznych obliczonych dla obszarów o wymiarach $5' \times 5'$. W drugim wyznaczeniu geoidy (Łyszkowicz & Denker, 1994) nowe dane grawimetryczne (ok. 8000 dodatkowych anomalii Faye'a) i topograficzne zostały włączone do obliczeń. W 1994 r. obliczono następną wersję grawimetrycznej geoidy oraz po raz pierwszy obliczono quasigeoidę dla obszaru Polski (Łyszkowicz & Forsberg, 1995). Dodatkowo obliczono grawimetryczne składowe odchylenia pionu ξ i η . Do obliczeń użyto łącznie ok. 130 000 (średnich lub punktowych) danych grawimetrycznych. Obliczenia przeprowadzono za pomocą znanych wzorów całkowych, do oszacowania których wykorzystano metodę sferycznej transformaty Fouriera.

Końcowym wynikiem obliczeń jest nowa grawimetryczna geoida dla obszaru Polski w postaci mapy izolinii oraz zbioru numerycznych wartości odstępów geoidy od elipsoidy GRS80 w węzłach siatki geograficznej o wymiarach 1.5×3.0 .

Metoda obliczeniowa

Do wyznaczenia nowej grawimetrycznej geoidy dla obszaru Polski włączono informacje pochodzące z geopotencjalnego modelu pola siły ciężkości (GM), z anomalii grawimetrycznych (Δg_F) i wysokości topograficznych (H). Obliczenia zrealizowano według następujących wzorów:

$$N = N_{GM} + N_{\Delta g} + N_H \quad (1)$$

$$\Delta g = \Delta g_F + \Delta g_{GM} - \Delta g_H \quad (2)$$

Składniki N_{GM} i Δg_{GM} zostały obliczone z rozwinięcia potencjału zakłócającego w szereg funkcji kulistych, a czynnik $N_{\Delta M}$ został obliczony z całki Stokesa

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (3)$$

gdzie: $S(\psi)$ jest funkcją Stokesa, a σ jest obszarem całkowania. Powszechnie znana całka Stokesa została oszacowana za pomocą dwuwymiarowej wielopasmowej transformaty Fouriera (Forsberg & Sideris, 1993). Pozwoliło to uniknąć postulatu, że Ziemia jest płaską powierzchnią.

*Zakład Geodezji Planetarnej, Centrum Badań Kosmicznych PAN, ul. Bartycka 18A, 00-716 Warszawa

Całka Stokesa została wyprowadzona przy założeniu, że masy topograficzne leżące powyżej geoidy zostały matematycznie przesunięte pod geoidę. Efekt ten można uzyskać poprzez odpowiednie redukcje topograficzne. Redukcja Helmherta Δg_H kondensuje wszystkie masy topograficzne na powierzchni geoidy. Wyrażenie N_H w równaniu (1) zwane jest efektem pośrednim topografii terenu na geoidę i określa przesunięcie powierzchni ekwipotencjalnej spowodowane przez poprawkę Δg_H . Na obszarach równinnych wpływ topografii terenu na geoidę jest znikomy i może być zaniebany. W Tatrach i Sudetach wpływ topografii na geoidę może osiągnąć wielkość rzędu kilku **cm** ????. W niniejszej pracy wyraz N_H został obliczony z numerycznego modelu terenu ($1,5' \times 3,0'$) według następujących wzorów:

$$\Delta g_H = c \quad (4)$$

$$N_H = \frac{\pi G \rho H^2}{\gamma} \quad (5)$$

gdzie: c jest klasyczna poprawką terenową już istniejącą w posiadanym materiale grawimetrycznym, G jest stałą grawitacji, a ρ jest gęstością mas topograficznych.

W praktyce w pierwszym kroku obliczono anomalie Bouguera w węzłach siatki $1,5' \times 3,0'$. Następnie do tak wyliczonych anomalii dodano poprawkę wynikającą z przyciągania płyty o grubości H .

Dane użyte do obliczenia geoidy

Informacje o globalnym polu siły ciężkości można uzyskać z modeli geopotencjalnych. Obecnie jest tylko kilka ośrodków w Europie i USA, które opracowują i publikują globalne modele pola siły ciężkości. W praktyce dosyć często są używane modele opracowane na uniwersytecie w Ohio, które popularnie są zwane modelami OSU. W niniejszej pracy wyrazy N_{GM} i Δg_{GM} występujące we wzorze (1) i (2) zostały obliczone z modelu OSU91A (Rapp & Pavlis, 1990).

W celu obliczenia redukcji topograficznych niezbędny jest odpowiedni numeryczny model terenu. Zakład Geodezji Planetarnej (Łyszkowicz, 1994) opracował numeryczny model terenu o rozdzielczości $0,5' \times 0,5'$ dla obszaru Polski. Dodatkowo, uzyskano dane wysokościowe w węzłach siatki $5' \times 7,5'$ z obszaru Czech, Słowacji, Węgier, Ukrainy Zachodniej i Rumunii. Dla pozostałych obszarów użyto wysokości z modelu ETOPO5. Wszystkie dane wysokościowe zostały starannie sprawdzone pod kątem błędów grubych. Z wymienionych danych utworzono zbiór średnich wysokości w węzłach siatki $1,5' \times 3,0'$ dla obszaru $45^\circ < \phi < 75^\circ$ i $0^\circ < \lambda < 75^\circ$.

W celu obliczenia grawimetrycznej geoidy (lub quasigeoidy) i składowych odchylenia pionu dla obszaru Polski, zgromadzone do końca października 1994 r. dane grawimetryczne dla obszaru $45^\circ < \phi < 75^\circ$ i $0^\circ < \lambda < 35^\circ$ z następujących organizacji:

- 1 Instytutu Geodezji, Topografii i Kartografii, Praga,
- 1 Instytutu Geodezji i Kartografii, Warszawa,
- 1 Instytutu Geodezji i Geofizyki, Bukareszt,
- 1 Kort-Og- Matrikelstyrelsen, Kopenhaga
- 1 Institute für Erdmessung, Hanower,
- 1 Politechniki Lwowskiej, Wydział Geodezji, Lwów,
- 1 Instytutu Geodezji, Kartografii i Teledetekcji, Budapeszt,
- 1 Zakładu Geodezji Planetarnej, CBK, Warszawa.

Zgromadzone dane grawimetryczne wymagały ujednoczenia to znaczy odniesienia do pola normalnego γ_{1980} i grawimetrycznego poziomu odniesienia IGSN71. W niniejszej pracy do danych grawimetrycznych wprowadzono poprawki: z tytułu różnych wzorów na pole normalne, z tytułu różnych grawimetrycznych poziomów odniesienia i popra-

Tab. 1. Statystyka źródłowych, rezydualnych i wyinterpolowanych (1,5' x 3,0') anomalii grawimetrycznych (w mGal)

Anomalie	Liczebność zbioru	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość minimalna	Wartość maksymalna
Źródłowe	130 226	1,07	19,27	-72,67	159,15
Rezydualne	130 226	-0,20	9,82	-86,67	102,82
Wyinterpolowane	120 000	-0,07	12,55	-85,48	95,17

Tab. 2. Statystyka geoidy obliczonej z modelu, rezydualnej geoidy, ostatecznej geoidy i quasigeoidy (w metrach)

Geoida	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość minimalna	Wartość maksymalna
Z modelu OSU	35,98	7,14	21,04	51,08
Rezydualna	-0,05	0,45	-3,40	1,21
Geoida ostateczna	35,93	7,21	21,24	51,54
Quasigeoida	35,91	7,19	21,24	50,77

Tab. 3. Porównanie geoidy uzyskanej z GPS/niwelacja z geoidą grawimetryczną (wyniki w metrach)

Kolejna wersja geoidy	Liczba kontrolnych punktów	Średnia wartość	Odchylenie standardowe	Wartość minimalna	Wartość maksymalna
Astro-graw. (1978)	10	-0,26	±0,68	-1,40	0,88
Łyszczowicz (1993)	10	-0,14	±0,26	-1,49	0,00
Łyszczowicz & Denker (1994)	10	-0,15	±0,24	-0,54	0,30
Geoida 94 (przed dopasowaniem)	13	-0,31	±0,15	-0,49	0,01

wki z tytułu przyciągania atmosfery. Następnie od tak ujednoliconych anomalii odjęto anomalie obliczone z modelu geopotencjalnego. Tak uzyskane anomalie rezydualne można zdefiniować następującym wzorem:

$$\Delta g_{rez} = \Delta g_F + \Delta g_A + c - \Delta g_{GM} + \Delta g_{nor} \quad (6)$$

gdzie: Δg_{rez} jest rezydualną anomalią Faye'a, Δg_A jest poprawką atmosferyczną, c jest poprawką topograficzną, Δg_{GM} jest anomalia wynikająca z przyjętego modelu geopotencjalnego, a Δg_{nor} jest poprawką z tytułu różnych wzorów na pole normalne.

Wyniki obliczeń

W celu obliczenia geoidy metodą FFT dane grawimetryczne muszą być przygotowane w postaci średnich wartości w węzłach siatki geograficznej. Cel ten został osiągnięty przez użycie szybkiej kolokacyjnej procedury (program GEOGRID) wyszukującej nie więcej niż 4 punkty w każdej ćwiartce wokół interpolowanego punktu. Zredukowane dane grawimetryczne zostały wyinterpolowane w węzłach siatki 1,5' x 3,0' dla następującego obszaru $45^\circ < \phi < 75^\circ$ i $0^\circ < \lambda < 35^\circ$ (ryc.1). W tab. 1 podano statystyczną charakterystykę źródłowych, rezydualnych i wyinterpolowanych anomalii grawimetrycznych dla wspomnianego obszaru. Obliczenie geoidy zostało przeprowadzone w jednym kroku dla

całego obszaru co w wyniku dało 300 x 400 rezydualnych odstępów geoidy od elipsoidy.

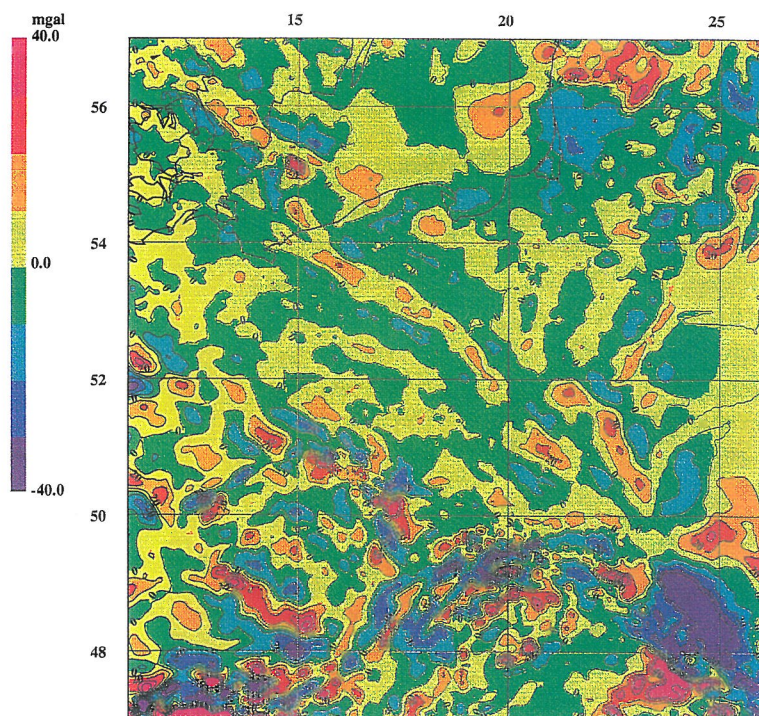
Efekt pośredni wpływu topografii terenu na geoidę został obliczony z równania (5) w węzłach siatki 1,5' x 3,0'. Wartości liczbowe tego efektu są istotne tylko w kilku górskich rejonach, gdzie osiągają wartości do kilku decymetrów. Na pozostałym obszarze Polski efekt ten przyjmuje wartości nie większe niż kilka milimetrów. Ostateczna geoida (rozwiązanie #1) została otrzymana przez dodanie do części rezydualnej części wynikającej z modelu geopotencjalnego i topografii (równanie 1, ryc. 2). Tak obliczona geoida (N) została przeliczona na quasigeoidę (ζ) według wzoru:

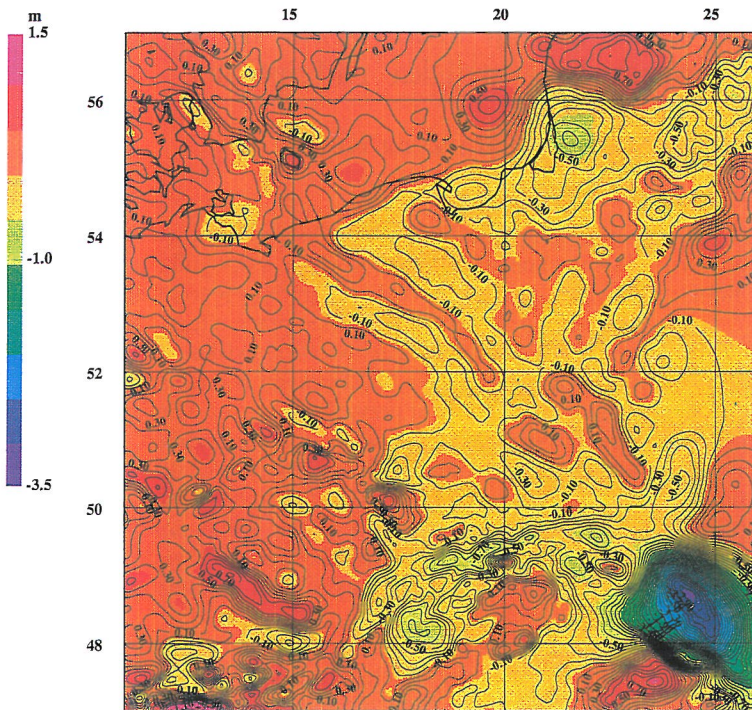
$$\zeta - N = \frac{\Delta g_B H}{\gamma_o} \quad (7),$$

a uzyskany wynik nazwano rozwiązaniem #2.

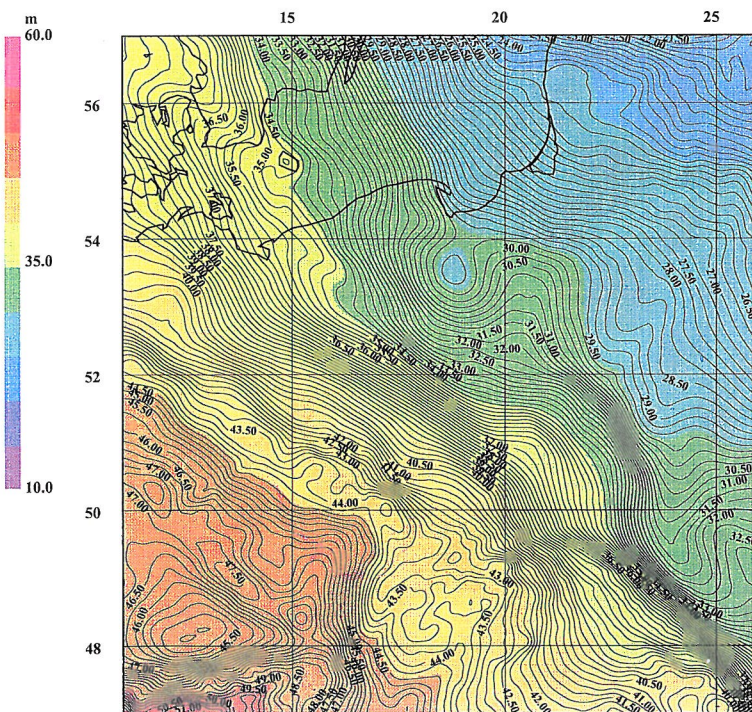
Poprawki obliczone według wzoru (7) są istotne tylko w kilku rejonach górskich gdzie osiągają wartości do kilku decymetrów. W tab. 2 podano statystyczną charakterystykę geoidy obliczonej z modelu, rezydualnej geoidy, ostatecznej wersji geoidy i quasigeoidy.

Wysokości elipsoidalne uzyskane w wyniku opracowania kampanii EU-REF-POL (Zieliński i in., 1994) oraz kampanii *Baltic Sea Level Project* (Zdunek, 1994) wraz z wysokościami nad średnim poziomem morza z niwelacji posłużyły do oszacowania bezwzględnej dokładności obliczonej geoidy. Obli-

**Ryc. 1.** Rezydualne anomalie Faye'a



↑ Ryc. 2. Rezydualne odstępny geoidy od elipsoidy
 ↓ Ryc. 3. Ostateczna wersja odstępów geoidy od elipsoidy



czony wysokości elipsoidalne odnoszą się do elipsoidy WGS84, a ich dokładność wyznaczenia jest rzędu ± 3 cm.

Wszystkie punkty sieci GPS zostały dowiązane do państwowej osnowy wysokościowej. Dowiązanie zostało wykonane za pomocą niwelacji geometrycznej do najbliższych reperów. Szacuje się, że dokładność takiego dowiązania zapewnia wyznaczenie wysokości punktów GPS nad średnim poziomem morza z dokładnością rzędu $\pm 2...6$ cm.

Należy więc oczekiwać, że wyliczone z danych GPS i niwelacji odstępny geoidy od elipsoidy na punktach GPS są z błędem rzędu ± 6 cm.

Grawimetryczna geoida i geoida wyznaczona z danych GPS i niwelacji jak wiadomo są w różnych układach odniesienia. W celu dopasowania geoidy grawimetrycznej do wielkości wzorcowych uzyskanych z danych GPS i niwelacji, należy wyeliminować istniejące między obydwo układami przesunięcie. Do tego celu najlepiej nadaje się tak zwana transformacja czteroparametrowa. Równanie opisujące ten typ transformacji ma postać:

$$N' = N + b_0 + b_1 \cos \varphi \cos \lambda + b_2 \sin \varphi \quad (8)$$

gdzie: b_0 jest przesunięciem między układami, a współczynniki b_1 , b_2 , b_3 są parametrami translacji między osiami x , y , z obydwu układów.

Porównano pięć geoid obliczonych ostatnio w Polsce z odstępami wyliczonymi z GPS i niwelacji. Geoidy te to: astro-grawimetryczna geoida (Bokun, 1961), grawimetryczna geoida (Łyszkowicz, 1993), nowsza wersja grawimetrycznej geoidy (Łyszkowicz & Denker, 1994) i ostatnia wersja geoidy (Łyszkowicz & Forsberg, 1995) o nazwie geoida94. Absolutne różnice między wzorcową geoidą z danych GPS plus niwelacja a pozostałymi pięcioma rozwiązaniami pozwoliły ocenić jakość poszczególnych rozwiązań. Z tab. 3 wynika, że został osiągnięty istotny wzrost dokładności kolejnych wyznaczeń geoidy. Dokładność pierwszej astro-grawimetrycznej geoidy jest szacowana na 68 cm podczas gdy w ostatnim wyznaczeniu, po usunięciu czynnika systematycznego i po zredukowaniu nachylenia geoidy, powierzchnia ta wpasowuje się w wysokości wyznaczone z GPS i niwelacji z dokładnością ± 6 cm.

Literatura

- BOKUN J. 1961 — Pr. Instytutu Geodezji i Kartografii, 8: 113–140.
 FORSBERG R., SIDERIS M.G. 1993 — Manuscripta Geodaetica, 18: 82–90.
 ŁYSZKOWICZ A. 1993 — Planetary Geodesy, 28: 74–150.
 ŁYSZKOWICZ A. & DENKER H. 1994 — Ibidem, 29: 1–14.
 ŁYSZKOWICZ A. 1994 — Opis algorytmu badania geoidy na obszarze Polski, dane grawimetryczne i wysokościowe, grawimetryczna baza danych GRAVBASE ver. 1.0, Report No 11, Polish Academy of Sciences, Space Research Centre, Warszawa
 ŁYSZKOWICZ A. & FORSBERG R. 1995 — International Association of Geology Bulletin d'Information, 77: 153–161.

RAPP R.H. & PAVLIS N.K. 1990 — J. Geoph. Research 95: 21885–21911.

ZDUNEK R. 1994 — Baltic Sea Level Project—National Report, Baltic Sea Level Workshop, Dresden, 9–10 Sept.

ZIELIŃSKI J.B., JAWORSKI L., ZDUNEK R., SEEGER H., ENGELHARDT G., TOPPE F., & LUTHARDT J. 1994 — Publication, 3: 92–99.