

O BŁĘDZIE USYTUOWANIA IZOLINII ORAZ WYINTERPOLOWANEJ WARTOŚCI Δg

UKD 550.831.016:528.067(084.3-33).05

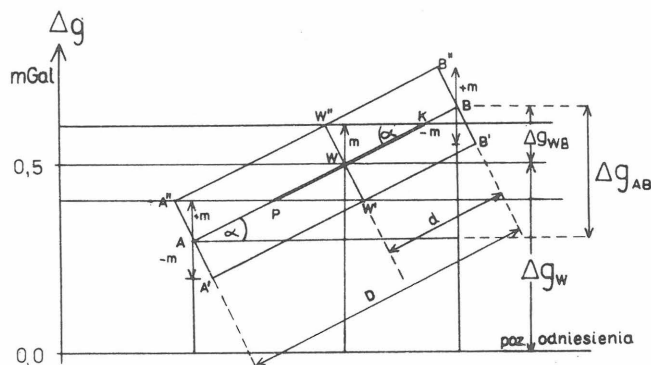
Grawimetryczny materiał pomiarowy, odpowiednio przeliczony, stanowi podstawę dla wszelkiego rodzaju opracowań kartometrycznych, przedstawiających wyniki pomiarów oraz w szerokim zakresie – interpretację jakościową. Pomiar w terenie, a także operacje rachunkowe związane z wprowadzeniem poprawek i redukcji do wartości uzyskanych z pomiaru nie są wolne od błędów. Błędy te decydują o dokładności wyznaczonych wartości anomalii. Pomijając całą analizę związaną z błędem anomalii (1, 2),

określonej w punkcie pomiarowym, rozpatrzmy dwa następujące problemy:

1. Jak wielki jest błąd poziomego usytuowania izolinii, wyinterpolowanej z punktów, dla których określone są wartości anomalii (Δg) oraz ich błędy;

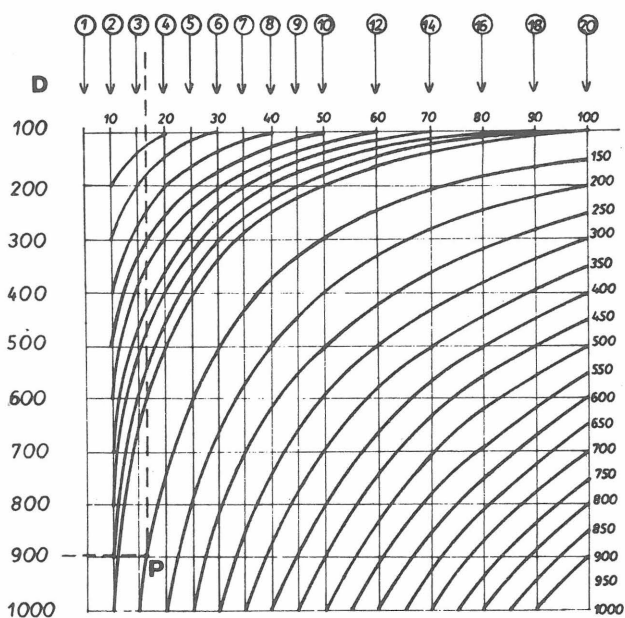
2. Jak wielki jest błąd wartości wyinterpolowanego punktu.

Polowy materiał obserwacyjny, ze względu na konieczność wprowadzenia różnych poprawek, staje się użyteczny



Ryc. 1. Schemat graficzny pomocny dla określenia wyinterpretowanej wartości Δg_w oraz błędu usytuowania izolinii (PK). Objaśnienia w tekście

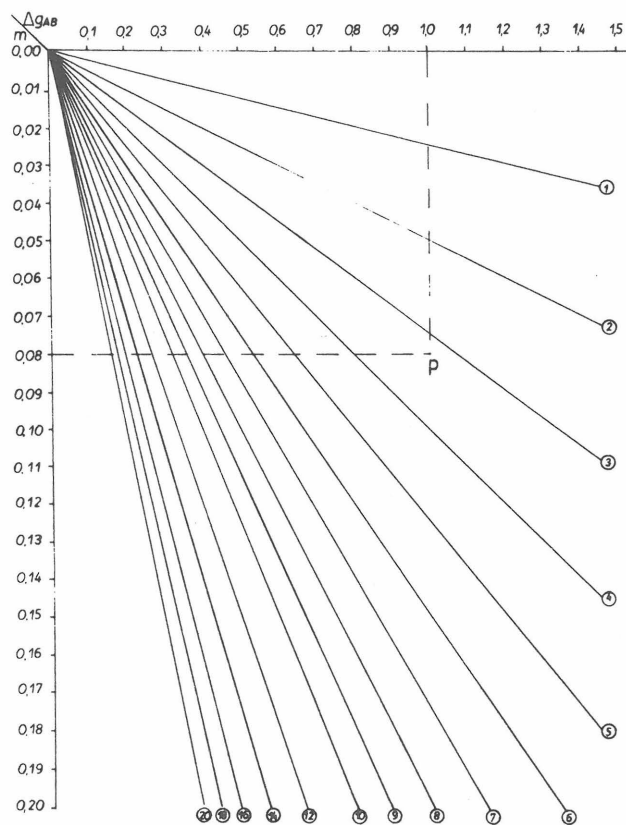
Fig. 1. Graphic scheme useful for evaluation of interpreted value Δg_w and error in delineation of isoline (PK). Explanations as given in the text



Ryc. 3. Fig. 3.

wówczas, gdy zostanie poddany procesowi odpowiednich przeliczeń. Proces ten, jakkolwiek konieczny, wprowadza jednak dość znaczne błędy obciążające ostateczne wartości. Pomimo stosowania precyzyjnej aparatury pomiarowej (grawimetri o dokładności pomiaru $\pm 0,02$ mGal), błędy związane z redukcją pomiarów a także innego rodzaju powodują, iż wynikowe wartości anomalii (Δg) obciążone są błędami rzędu $\pm 0,1$ mGal i więcej.

W celu wykreślenia izolinii wykonuje się interpolację między punktami o określonych wartościach anomalii (Δg), traktując te wartości jako bezbłędne. W rzeczywistości błędy tych wartości są dość znaczne i z reguły przekraczają kilkakrotnie dokładność pomiaru. Zakładając, iż anomalie w punktach A i B (ryc. 1) obciążone są błędami: $\pm m_A$ w punkcie A i $\pm m_B$ w punkcie B, oraz że błędy te są sobie równe $m_A = m_B = m$, anomalia określona w punkcie A, może w skrajnych przypadkach wykazywać wartości $(A+m)$ lub $(A-m)$, podobnie jak anomalia określona w punkcie B oraz w interpolowanym punkcie W.



Ryc. 2. Fig. 2.

Ryc. 2 i 3. Nomogramy do obliczania błędu usytuowania izolinii wyinterpretowanej z punktów leżących w odległości D, posiadających określone wartości anomalii Δg oraz określone błędy tych wartości m

Figs. 2 and 3. Nomograms for calculations of error in delineation of isoline interpolated on the basis of points situated in distance and characterized by definite values of anomaly Δg and errors in estimations of these values (m)

Przyjmując następujące oznaczenia:

- A, B – punkty stanowiące podstawę interpolacji,
- $\pm m$ – wartość błędu anomalii (Δg) w punktach A i B,
- W – punkt wyinterpolowany,
- D – odległość między punktami A i B,
- d – odległość między punktami W–B,
- Δg_w – wartość anomalii w punkcie W,
- Δg_{AB} – przyrost anomalii między punktami A–B,
- Δg_{WB} – przyrost anomalii między punktami W–B,
- PK – wielkość błędu usytuowania izolinii

i wychodząc z proporcji $\frac{WK}{m} = \frac{D}{\Delta g_{AB}}$

$$\text{otrzymamy } WK = \frac{mD}{\Delta g_{AB}}$$

Punkt (W) jako wyinterpolowany z wartości obciążonych błędami $\pm m$, może przyjmować dowolne położenie w granicach odcinka PK. Ponieważ $WK = WP = \frac{1}{2} \cdot PK$

$$PK = \frac{2mD}{\Delta g_{AB}} \quad [1]$$

PK stanowi wielkość błędu poziomego usytuowania izolinii. Błąd ten jest wprost proporcjonalny do odległości zawartej między punktami (A i B), z których uzyskujemy wyinterpolowaną wartość, a także do błędu z jakim zostały określone dane wyjściowe stanowiące podstawę interpolacji (w punktach A i B). Błąd ten jest odwrotnie pro-

porcjonalny do przyrostu siły ciężkości zawartego między punktami A i B .

Dla przykładu: jeśli odległość między punktami A i B wynosi 700 m, błąd anomalii w punktach A i B wynosi $\pm 0,1$ mGal, zaś przyrost siły ciężkości między punktami A i B jest równy 0,5 mGal, to wielkość błędu poziomego usytuowania izolinii wyniesie 280 m. Jeżeli przyrost Δg_{AB} byłby równy 1,5 mGal, przy pozostałych założeniach bez zmian, błąd poziomego usytuowania izolinii będzie równy 93 m.

Przykład wyznaczenia błędu usytuowania izolinii z nomogramów (ryc. 2 i 3) dla następujących danych:

$m = \pm 0,08$ mGal – błąd określenia anomalii w punkcie pomiarowym,

$\Delta g = 1$ mGal – przyrost Δg między punktami A i B stanowiącymi podstawę interpolacji,

$D = 900$ m – odległość między punktami A i B .

Korzystając z danych m oraz Δg , wyznaczmy na ryc. 2 punkt P . Punkt ten (P) dla $D = 900$ m na ryc. 3 zajmie położenie w pobliżu krzywej o wartości 150 m. Dokonujemy odczytu uzyskując wartość błędu usytuowania izolinii = 144 m.

Wzór [1] stwarza podstawę dla ustalenia kryterium maksymalnej ilości izolinii możliwych do przeprowadzenia między punktami A i B . Skoro pojedyncza izolinia może przyjmować dowolne położenie w granicach odcinka PK , to takich odcinków (PK) mieści się w odległości D zawartej między punktami A i B określona ilość

$$\text{równa } \frac{D}{PK}$$

natomiast maksymalna ilość izolinii (i) możliwa do wykreślenia między punktami A i B będzie równa

$$i_{\max} = \frac{D}{PK} - 1 \quad \text{lub} \quad i_{\max} = \frac{\Delta g_{AB}}{2m} - 1 \quad [2]$$

Na podstawie wzoru [2] możemy wyznaczyć maksymalną ilość izolinii, przecinających odcinek D . Ilość tych izolinii jest wprost proporcjonalna do przyrostu siły ciężkości, zawartego między punktami stanowiącymi podstawę interpolacji, oraz odwrotnie proporcjonalna do błędów wartości, na podstawie których przeprowadza się interpolację. Dla przykładu: jeśli przyrost zawarty między punktami A i B wynosi 0,6 mGal, wartości punktów A i B zaś obarczone są błędami $m = \pm 0,1$ mGal, to maksymalna ilość izolinii możliwa do wykreślenia między tymi punktami będzie równa 2 (ryc. 4). Wartość wyinterpolowanego punktu, określimy z zależności:

$$(\Delta g_B - \Delta g_A)d = D(\Delta g_B - \Delta g_W)$$

skąd

$$\Delta g_W = \Delta g_B - \frac{d \Delta g_{AB}}{D}$$

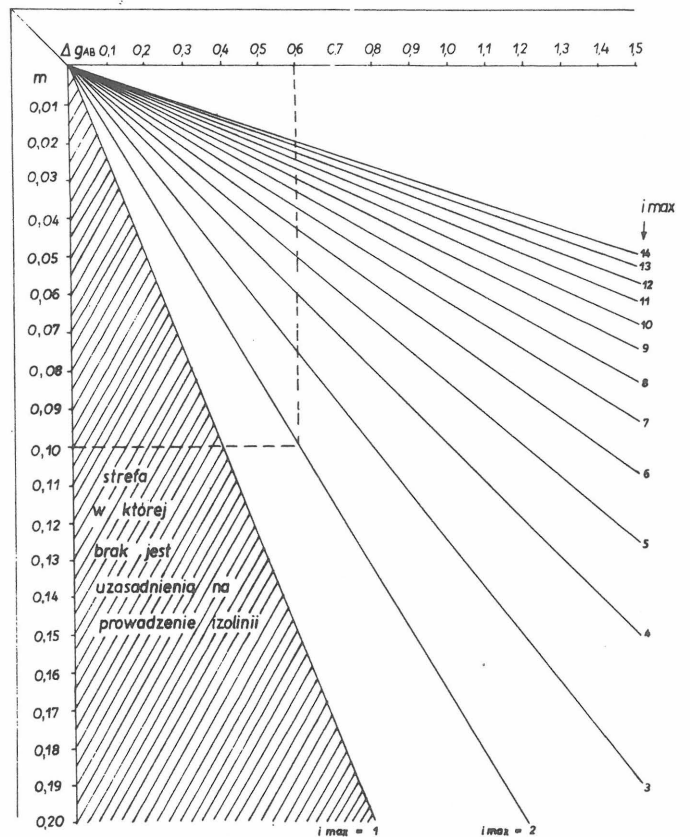
Różniczkując ostatnie wyrażenie względem zmiennych otrzymamy:

$$\frac{\partial(\Delta g_W)}{\partial(\Delta g_B)} = 1$$

$$\frac{\partial(\Delta g_W)}{\partial d} = - \frac{\Delta g_{AB}}{D}$$

$$\frac{\partial(\Delta g_W)}{\partial(\Delta g_{AB})} = - \frac{d}{D}$$

$$\frac{\partial(\Delta g_W)}{\partial D} = \frac{d \Delta g_{AB}}{D^2}$$



Ryc. 4. Nomogram pozwalający określić maksymalną ilość izolinii (i) możliwych do przeprowadzenia między punktami (A i B), dla których określone są błędy (m), a także określony przyrost siły ciężkości (Δg_{AB})

Fig. 4. Nomogram making possible estimation of the maximum number of isolines (i) which may be drawn between points (A and B) and for which there are estimated errors (m) and increase in gravity (Δg_{AB})

a więc błąd wyinterpolowanego punktu będzie równy:

$$m_{\Delta g_W} = \pm \sqrt{m^2 + \left(\frac{\Delta g_{AB}}{D}\right)^2 m_d^2 + \left(\frac{d}{D}\right)^2 m_{\Delta g_{AB}}^2 + \left(\frac{d \Delta g_{AB}}{D^2}\right)^2 m_D^2} \quad [3]$$

zakładając:

$$\begin{aligned} m &= 0,1 \text{ mGal} \\ m_{\Delta g_{AB}} &= 0,1 \cdot \sqrt{2} \text{ mGal} \\ m_d &= 20 \text{ m} \\ m_D &= 20 \text{ m} \\ \Delta g_{AB} &= 0,45 \text{ mGal} \\ D &= 700 \text{ m} \\ d &= 300 \text{ m} \end{aligned}$$

otrzymamy:

$$m_{\Delta g_W} = \pm 0,12 \text{ mGal}$$

gdzie:

- $m_{\Delta g_{AB}}$ – wartość błędu przyrostu siły ciężkości między punktami A i B
- m_d – wartość błędu odległości zawartej między punktami W i B
- m_D – wartość błędu odległości zawartej między punktami A i B .

Przyjmując $D = 500$ m, pozostałe założenia bez zmian, błąd wyinterpolowanej wartości Δg_W uzyska wielkość równą $\pm 0,13$ mGal. Uogólniając można powiedzieć, iż błąd wyinterpolowanej wartości Δg_W rośnie wraz ze

wzrostem liczników ilorazów uwidoczniionych pod pierwiastkiem, wzór [3]. Wzrost mianowników (D) powoduje zmniejszanie się błędu wyinterpolowanej wartości Δg_w .

WNIOSKI

Wielkość błędu usytuowania izolinii jest wprost proporcjonalna do iloczynu błędu anomalii przez odległość zawartą między punktami stanowiącymi podstawę interpolacji, odwrotnie proporcjonalna zaś do przyrostu siły ciężkości, zawartego między tymi punktami. Widzimy więc, że wzrost błędu usytuowania izolinii jest uwarunkowany trzema czynnikami:

- 1) wzrostem błędu anomalii;
- 2) wzrostem odległości, zawartej między punktami stanowiącymi podstawę interpolacji;
- 3) zmniejszaniem $|\Delta g|$, między punktami stanowiącymi podstawę interpolacji.

Błąd wyinterpolowanej wartości (Δg_w) zależy od czynników wchodzących pod pierwiastek wzoru [3]. Generalizując wyniki analizy można przyjąć, iż błąd wyinterpolowanej wartości (Δg_w) zależy głównie od:

- 1) błędów jakimi obarczone są punkty stanowiące podstawę interpolacji,
- 2) położenia punktu wyinterpolowanego względem punktów stanowiących podstawę interpolacji,
- 3) wielkości Δg zawartej między punktami stanowiącymi podstawę interpolacji,
- 4) odległości zawartej między punktami stanowiącymi podstawę interpolacji.

W szczególności wzrost błędu wyinterpolowanej wartości (Δg_w) zależy od:

- 1) wzrostu błędów wartości anomalnych w punktach stanowiących podstawę interpolacji,
- 2) zbliżenia się punktu wyinterpolowanego do środka odległości zawartej między punktami stanowiącymi podstawę interpolacji,
- 3) wzrostu $|\Delta g|$ zawartej między punktami stanowiącymi podstawę interpolacji,
- 4) zmniejszenia odległości zawartej między punktami stanowiącymi podstawę interpolacji.

LITERATURA

1. Grobelny A. — Zagadnienie określenia dokładności anomalii Bouguera. Kwart. Geol. 1968 nr 3.
2. Grobelny A. — Wpływ określenia błędu ciężaru objętościowego warstwy redukcyjnej na wartość anomalii Bouguera. Kwart. Geol. 1975 nr 1.

SUMMARY

Interpolation based on points with error-laden values results in delineation of an interpreted isoline in so-called "error zone". The magnitude of error in delineation of the isoline depends on:

- 1) errors connected with points used as the basis for interpolation;
- 2) distance between the above points; and
- 3) increase of gravity between the points.

The magnitude of error in delineation of isoline (Δg), mathematically treated, is as follows:

$$PK = \frac{2mD}{\Delta g_{AB}}$$

Error in value of anomaly Δg interpolated on the basis of points with error-laden values depends on:

- 1) errors of points used as the basis for interpolation;

- 2) location of the interpolated point in relation to those used as the basis for interpolation;
- 3) increase of gravity between points used as the basis for interpolation,
- 4) distance between the above points.

The magnitude of error of the interpolated point may be mathematically expressed by the equation:

$$m_{\Delta g_w} = \pm \sqrt{m^2 + \left(\frac{\Delta g_{AB}}{D}\right)^2 m_d^2 + \left(\frac{d}{D}\right)^2 m_{\Delta g_{AB}}^2 + \left(\frac{d \Delta g_{AB}}{D^2}\right)^2 m_D^2} \quad [3]$$

The criterion of the maximum number of isolines which may be drawn between points A and B may be expressed by the following equation:

$$i_{max} = \frac{\Delta g_{AB}}{2m} - 1$$

In the above equations, A and B represent points used as the basis for interpolation, W — interpolated point, PK — magnitude of error in delineation of isoline, D — distance between points A and B , d — distance between points W and B , Δg_A — value of anomaly at the point A , Δg_B — as above, at the point B , Δg_w — as above, at the point W , Δg_{AB} — increase of anomaly between points A and B , Δg_{WB} — as above, between points W and B , i — number of isolines, m — error of anomaly at points A and B , $m \Delta g_w$ — error of anomaly at interpolated point W , $m \Delta g_{AB}$ — error in increase of anomaly between points A and B , m_D — error in distance D , m_d — error in distance d .

РЕЗЮМЕ

Интерпретация основанная на точках со значениями содержащими ошибки является причиной того, что выинтерполированная кривая находится в „зоне ошибки”. Величина ошибки расположения изолинии зависит от:

- 1) ошибок точек составляющих основание интерполяции,
- 2) расстояния между точками составляющими основание интерполяции,
- 3) приращения силы тяжести между точками составляющими основание интерполяции.

Величину ошибки расположения изолинии (Δg) можно представить следующей формулой:

$$PK = \frac{2mD}{\Delta g_{AB}}$$

Ошибка значения anomalii Δg выинтерполированной из точек содержащих определённые ошибки зависит от:

- 1) ошибок точек представляющих собой основание интерполяции,
- 2) расположения точки выинтерполированной по отношению к точкам составляющим основание интерполяции,
- 3) приращения силы тяжести между точками составляющими основание интерпретации,
- 4) расстояния между этими точками.

Величина ошибки выинтерполированной точки представляется следующей формулой:

$$m_{\Delta g_w} = \pm \sqrt{m^2 + \left(\frac{\Delta g_{AB}}{D}\right)^2 m_d^2 + \left(\frac{d}{D}\right)^2 m_{\Delta g_{AB}}^2 + \left(\frac{d \Delta g_{AB}}{D^2}\right)^2 m_D^2} \quad [3]$$