

OZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA FILTRACJI OŚRODKÓW ANIZOTROPOWYCH O STRUKTURZE WARSTWOWEJ

DETERMINING THE HYDRAULIC CONDUCTIVITY OF LAYERED ANISOTROPIC MEDIA

STANISŁAW ŻAK¹

Abstrakt. W artykule przedstawiono formułę wyrażającą wartość zastępczego współczynnika filtracji dla dowolnego kierunku przepływu w ośrodku o strukturze warstwowej. Przedstawiono również wyrażenie na obliczanie kąta między kierunkiem gradientu hydraulicznego ($\text{grad}H$) a kierunkiem prędkości filtracji \mathbf{v} . Ta różnica kierunków powinna być uwzględniana przy badaniu współczynnika filtracji w permeametrach. Jest to jednak praktycznie niemożliwe do spełnienia. W permeametrach kierunek $\text{grad}H$ jest zwykle zbliżony do kierunku prędkości filtracji \mathbf{v} . W przypadku przepływu w kierunku ukośnym do ułożenia warstw (innym niż kierunki główne tensora wodoprzepuszczalności) powoduje to powstanie błędów w oznaczaniu zastępczego współczynnika filtracji. W artykule oszacowano wielkość tych błędów. W tym celu porównano obliczenia teoretyczne, uwzględniające zróżnicowanie kierunków $\text{grad}H$ i \mathbf{v} , z numerycznymi obliczeniami przepływu odpowiadającymi warunkom wykonywania badania w permeametrze. Wynikają stąd praktyczne wnioski związane z oznaczaniem elipsy współczynnika filtracji ośrodków anizotropowych.

Słowa kluczowe: współczynnik filtracji, anizotropia, ośrodek o strukturze warstwowej, permeametr, metoda różnic skończonych.

Abstract. The article presents a formula expressing the value of equivalent hydraulic conductivity for any possible flow direction in a layered medium. It also presents an expression for calculating the angle between the direction of hydraulic gradient ($\text{grad}H$) and the direction of filtration velocity \mathbf{v} . This difference in directions should be also taken into account when investigating hydraulic conductivity in permeameters. However, it is often practically impossible as the $\text{grad}H$ direction in permeameters is usually close to the direction of filtration velocity \mathbf{v} . When the flow direction is oblique to layering (it is different from the main directions of permeability tensor), it causes errors in determining equivalent hydraulic conductivity. The article estimates the size of these errors. With this aim, theoretical calculations, allowing for the difference in $\text{grad}H$ and \mathbf{v} directions, were compared with numerical flow calculations appropriate for permeameter test conditions. They lead to practical conclusions concerning the determination of the hydraulic conductivity ellipse for anisotropic media.

Key words: hydraulic conductivity, anisotropy, layered medium, permeameter, finite difference method.

WSTĘP

Pełna ocena właściwości filtracyjnych ośrodków anizotropowych wymaga określenia wartości współczynników filtracji w kierunku osi głównych tensora przepuszczalności. Dla ośrodków charakteryzujących się ortotropią dwuwymiarową, w tym dla ośrodków o regularnej strukturze warstwowej, będą to dwie wartości – jedna w kierunku równoległym (k_{\parallel}), a druga w kierunku prostopadłym (k_{\perp}) do granic między warstwami. Wartości te można określić wykonując badania

w permeametrze, w którym wymusza się przepływ we wspomnianych kierunkach. Jeżeli nie jest to możliwe, wykonuje się badania realizując przepływ w kierunku ukośnym do warstwowania, a następnie oblicza się k_{\parallel} oraz k_{\perp} . Prowadzi to wówczas do powstania błędów oznaczenia tych współczynników. Celem niniejszego artykułu jest omówienie przyczyn powstawania wspomnianych błędów i oszacowanie ich wielkości.

¹ Politechnika Wroclawska, Wydział Geoinżynierii, Górnictwa i Geologii, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław;
e-mail: stanislaw.zak@pwr.wroc.pl

FILTRACJA PRZEZ OŚRODEK O STRUKTURZE WARSTWOWEJ W WYIDEALIZOWANYCH WARUNKACH

Określenie przyczyn występowania błędów oznaczenia współczynnika filtracji ośrodków o strukturze warstwowej w permeametrze wymaga teoretycznej analizy przepływu cieczy w kierunku ukośnym do warstwowania. Wiąże się to z przedstawieniem konstrukcji elipsy współczynnika filtracji i określeniem kąta między gradientem hydraulicznym i prędkością filtracji.

ELIPSA WSPÓLCZYNNIKA FILTRACJI

Rozważmy przepływ cieczy nieściśliwej przez ośrodek gruntowy składający się z n jednorodnych i izotropowych warstw ułożonych równoległe, o nieograniczonym rozprze-strzenieniu w płaszczyźnie równoległej do granic tych warstw. Współczynniki filtracji i miąższości poszczególnych warstw wynoszą odpowiednio k_i i M_i . Załóżmy, że przez taki układ odbywa się ustalony przepływ cieczy w kierunku ukośnym do warstwowania (fig. 1).

W przypadku nieograniczonej wielkości warstw linie prądu będą miały kształt linii łamanej składającej się z odcinków prostych. Spadki hydrauliczne wzdłuż poszczególnych linii prądu, przy przepływie przez poszczególne warstwy, będą miały wartość stałą. Na granicach warstw wystąpi załamanie linii prądu, zgodnie z zależnością:

$$\frac{k_i}{k_{i+1}} = \frac{\operatorname{tg}(\beta_i)}{\operatorname{tg}(\beta_{i+1})} \quad [1]$$

Wydatek wody między dwoma liniami prądu przez każdą z warstw musi być jednakowy. Dla przepływu cieczy nieściśliwej przez i -tą warstwę wynosi on:

$$q = c_i k_i \frac{\Delta H_i}{l_i} = b \cos(\beta_i) k_i \frac{\Delta H_i}{l_i} \quad [2]$$

Uwzględniając zależność [1] oraz związku:

$$l_i = \frac{M_i}{\cos(\beta_i)} \quad [3]$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(\beta_i) = \frac{1}{\cos^2(\beta_i)} \quad [4]$$

otrzymuje się wyrażenie na wielkość strat hydraulicznych przy przepływie przez i -tą warstwę:

$$\Delta H_i = \frac{q M_i \left[1 + \frac{k_i^2}{k_1^2} \operatorname{tg}^2(\beta_1) \right]}{k_i b} \quad [5]$$

Uwzględniając ponadto, że

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\sum_{i=1}^n M_i \operatorname{tg}(\beta_i)} = \frac{k_1 \sum_{i=1}^n M_i}{\operatorname{tg}(\beta_1) \sum_{i=1}^n M_i k_i} \quad [6]$$

można określić sumę strat hydraulicznych na całej drodze przez n warstw

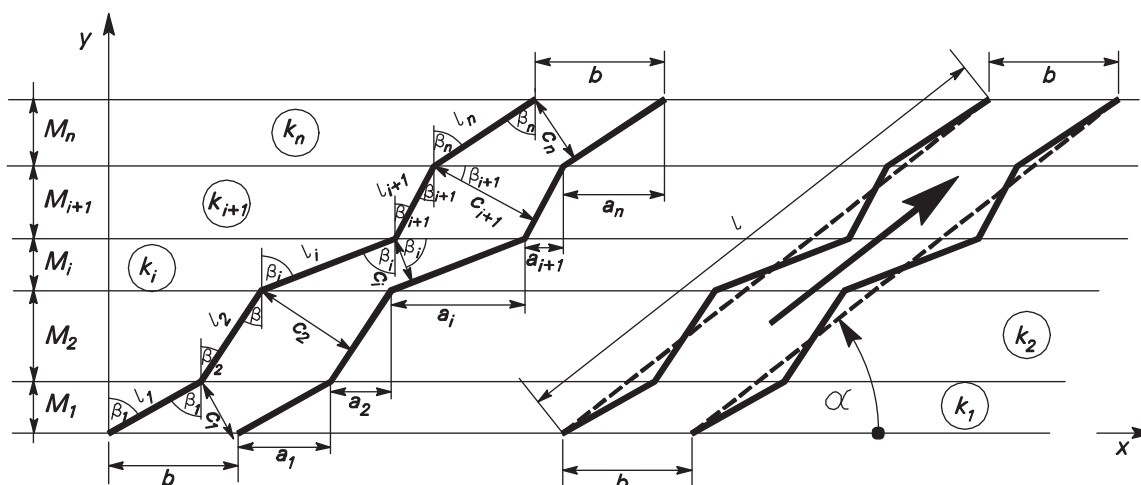


Fig. 1. Linie prądu i kierunek filtracji w ośrodku o strukturze warstwowej

Streamlines and filtration direction in a layered medium

$$\Delta H = \sum_{i=1}^n \Delta H_i = \frac{q}{b} \left[\sum_{i=1}^n \frac{M_i}{k_i} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n M_i \right)^2}{\operatorname{tg}^2(\alpha) \sum_{i=1}^n M_i k_i} \right] \quad [7]$$

W celu określenia zastępczego współczynnika filtracji zastąpmy układ warstw między liniami prądu pozostającymi w odległości b (wzdłuż osi x) jedną, jednorodną warstwą o szerokości b i długości l . Jeśli przyjmiemy, że jej współczynnik filtracji wynosi k_e , to strata wysokości hydraulicznych wyniesie:

$$\Delta H = \frac{ql}{k_e b \sin(\alpha)} = \frac{q \sum_{i=1}^n M_i}{k_e b \sin^2(\alpha)} \quad [8]$$

Porównując w obu przypadkach wielkość strat hydraulicznych otrzymuje się szukane wyrażenie na wartość zastępczego współczynnika filtracji dla ukośnego przepływu przez ośrodek o strukturze warstwowej:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\sum_{i=1}^n M_i k_i} \cos^2(\alpha) + \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \sin^2(\alpha) = \quad [9]$$

$$= \frac{1}{k_{\parallel}} \cos^2(\alpha) + \frac{1}{k_{\perp}} \sin^2(\alpha)$$

gdzie:

$$k_{\parallel} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i M_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad [10]$$

oznacza wartość zastępczego współczynnika filtracji k_e dla kierunku przepływu $\alpha = 0$ lub $\alpha = 180^\circ$, tj. równoległego do granicy warstw. Natomiast

$$k_{\perp} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\sum_{i=1}^n \frac{M_i}{k_i}} \quad [11]$$

oznacza wartość zastępczego współczynnika filtracji k_e dla kierunku przepływu $\alpha = 90^\circ$ lub $\alpha = 270^\circ$, tj. prostopadłego do granicy warstw (Pazdro, 1982; Rogoż, 2007).

Zgodna z oczekiwaniem jest również postać całego wyrażenia [9]. Jest identyczna z funkcją przedstawiającą współczynnik filtracji w gruntach ortotropowych, w których występuje anizotropia dwuwymiarowa (Snow, 1969; Wiczysty, 1982; Batu, 1998; Cheng, 2000).

Jeśli na podstawie równania [9] określi się wartości $\sqrt{k_e}$ dla różnych wartości α , to nanosząc je na wykres kołowy (wykres o współrzędnych biegunowych) powstanie elipsa. Jest ona nazwana elipsą współczynnika filtracji (*hydraulic conductivity ellipse*) lub elipsą ukierunkowania (Wiczysty, 1982).

KĄT MIĘDZY GRADIENTEM HYDRAULICZNYM A PRĘDKOŚCIĄ FILTRACJI

Kąt γ między gradientem hydraulicznym ($\operatorname{grad}H$) a prędkością filtracji \mathbf{v} można określić ze stosunku iloczynu skalarowego wektorów $\operatorname{grad}H$ i \mathbf{v} do iloczynu ich długości. W przypadku przepływu dwuwymiarowego przez ośrodki o strukturze warstwowej i przyjęcia kartezjańskiego układu prostokątnego, którego osie skierowane są zgodnie z osiami głównymi tensora współczynnika filtracji, kąt γ wynosi (fig. 2):

$$\gamma = \arccos \left(\frac{\operatorname{grad}H \bullet \mathbf{v}}{\|\operatorname{grad}H\| \|\mathbf{v}\|} \right) = \quad [12]$$

$$= \arccos \left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x} k_x \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} k_y \frac{\partial H}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2} \sqrt{k_x^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_y^2 \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2}} \right]$$

gdzie k_x i k_y oznaczają wartości tensora współczynnika filtracji k :

$$k = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \quad [13]$$

Uwzględniając związek

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{k_y \frac{\partial H}{\partial y}}{k_x \frac{\partial H}{\partial x}} \quad [14]$$

gdzie α oznacza kąt między wektorem prędkości a osią główną tensora współczynnika filtracji, wzdłuż której wartość k_e osiąga maksymalną wartość, otrzymuje się

$$\gamma = \arccos \left(\frac{k_y \cos^2(\alpha) + k_x \sin^2(\alpha)}{\sqrt{k_y^2 \cos^2(\alpha) + k_x^2 \sin^2(\alpha)}} \right) = \quad [15]$$

$$= \arccos \left(\frac{\cos^2(\alpha) + \lambda \sin^2(\alpha)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \lambda^2 \sin^2(\alpha)}} \right)$$

gdzie λ oznacza współczynnik anizotropii $\left(\lambda = \frac{k_x}{k_y} \right)$.

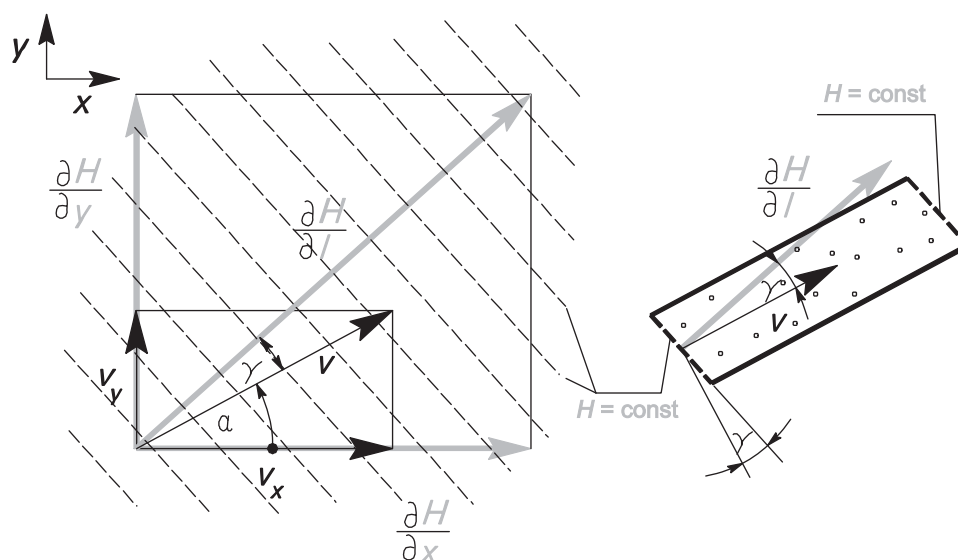


Fig. 2. Zróżnicowanie kierunków między gradientem hydraulicznym a prędkością filtracji

Direction differences between hydraulic gradient and filtration velocity

Z powyższej zależności można wyznaczyć wartość kąta α , dla którego kąt γ jest maksymalny. W tym celu należy wyznaczyć pochodną $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ i przyrównać do zera. Określony w ten sposób kąt wynosi:

$$\alpha = \pm \arctg \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} = \pm \arctg \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \quad [16]$$

Dla ośrodków o strukturze warstwowej wartości k_x odpowiada k_{\parallel} , a wartości k_y odpowiada k_{\perp} .

PRZYCZYNY POWSTAWANIA BŁĘDÓW OZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKA FILTRACJI

Zgodnie z równaniem [9] obliczenie współczynników filtracji w kierunkach równoległym i prostopadłym do granicy warstw jest możliwe na podstawie oznaczenia współczynnika filtracji k_e dla dwóch dowolnych i znanych kątów α . Uzyskuje się wówczas dwa równania z dwiema niewiadomymi k_{\parallel} i k_{\perp} . Wyznaczając te wartości, można następnie obliczyć zastępczy współczynnik filtracji k_e w dowolnym kierunku α . Jeśli natomiast występują trudności w ustaleniu kątów α , przy których wykonywane są badania wodoprzepuszczalności, to współczynniki k_{\parallel} i k_{\perp} można określić wykonując większą liczbę badań przy różnych kątach (co najmniej dla trzech różnych kątów), a następnie przeprowadzając dopasowanie uzyskanych wyników do równania elipsy (Cheng, 2000).

Tak wygląda teoria, jednak określenie współczynnika filtracji ośrodków anizotropowych w permeametrach wiąże się z dodatkowymi problemami. Analizując zależność [15] można zauważyć, że kąt między $\text{grad}H$ a v jest równy zero, tzn. oba kierunki pokrywają się tylko w przypadku, gdy kąt α jest równy 0, 90, 180 i 270 stopni, a więc jeśli przepływ odbywa się w kierunku równoległym lub prostopadłym do ułożenia warstw. Wykonując badania wzdłuż tych kierunków, nie popełnia się dodatkowych błędów wynikających z anizotro-

pii. Jeśli natomiast nie ma możliwości wykonania takiego pomiaru (np. próbki pochodzą z rdzeniowania otworu i oś otworu przebiega ukośnie do warstwowania), to określając wartość współczynnika filtracji w kierunku ukośnym do warstwowania, popełnia się błąd. Wynika on z faktu, że podczas pomiaru w permeametrach nie są zachowane odpowiednie kształty geometryczne próbki i zróżnicowanie kierunków między prędkością filtracji v i $\text{grad}H$.

Wymiary geometryczne związane są z zachowaniem kąta między kierunkiem filtracji a płaszczyzną, przez którą woda dopływa i wypływa z próbki, oraz odpowiednim ukształtowaniem powierzchni bocznych próbki. Powierzchnie dopływu i odpływu powinny być prostopadłe do gradientu wysokości hydraulicznej, a powierzchnie boczne równoległe do teoretycznych linii prądu składających się z odcinków linii prostych (fig. 2).

Zachowanie powyższych warunków jest bardzo trudne technicznie do zrealizowania, a ponadto wymagałoby wcześniejszej znajomości parametrów filtracyjnych poszczególnych warstw ośrodka. Znajomość tych parametrów pozwalałaby na teoretyczne obliczenie współczynnika filtracji bez konieczności dodatkowych badań. Jeśli natomiast założymy, że nie znamy tych parametrów, to zachowanie odpowiednich

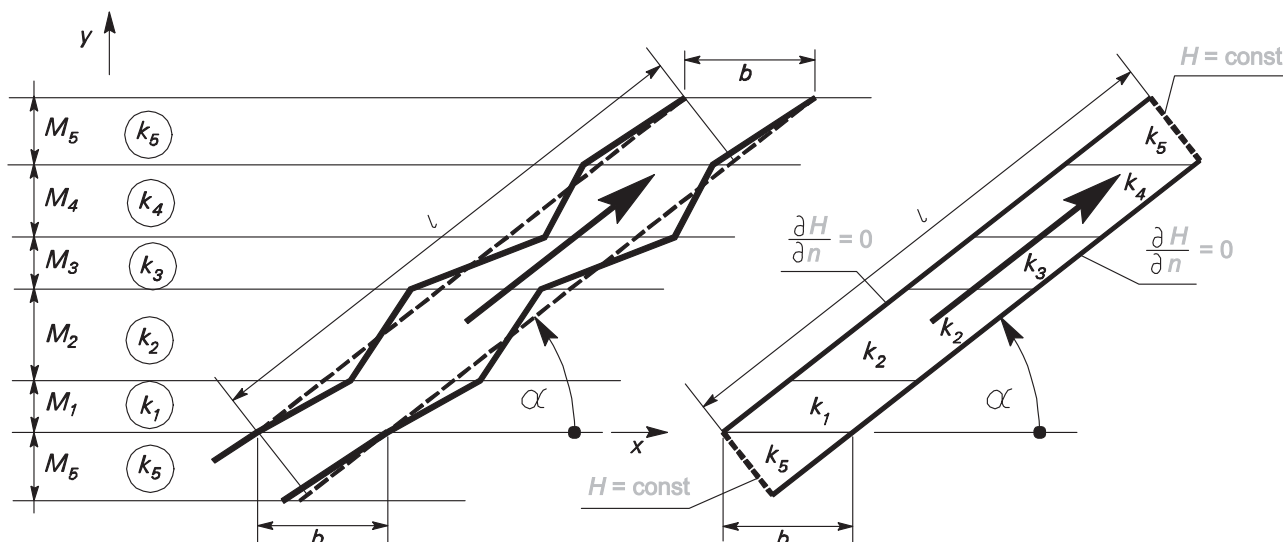


Fig. 3. Schemat sposobu przyjmowania kształtu geometrycznego próbki ośrodku o strukturze warstwowej do badań w permeametrze

Diagram of the pattern of adopting a geometric shape for a layered medium sample for permeameter analysis

kształtów próbki jest niemożliwe. W takim przypadku jako przybliżenie przedstawionego teoretycznego rozwiązania, odzwierciedlającego przepływ w kierunku ukośnym do warstwowania, jest przyjęcie przepływu przez próbkę, której wymiary geometryczne i warunki przepływu są zgodne z ideą przedstawioną na figurze 3. Należy przy tym zaznaczyć, że

przekrój próbki w kierunku prostopadłym do kierunku filtracji powinien mieć kształt prostokąta.

Prowadząc badania w permeametrze na próbkach o takim kształcie, nie można uniknąć błędów oznaczeń współczynnika filtracji. Wielkość tych błędów zależy od kąta α i współczynnika anizotropii.

PRZYKŁADOWE OBLICZENIA

W celu oszacowania wielkości błędów związanych z oznaczaniem współczynnika filtracji ośrodków o strukturze warstwowej poddanych badaniom w permeametrze przeprowadzono teoretyczne obliczenia przepływu przez fikcyjny ośrodek, składający się z warstw o znanych właściwościach. Polegały one na:

– określeniu zastępczego współczynnika filtracji na podstawie numerycznego obliczenia filtracji dla warunków brzegowych występujących podczas przepływu w permeametrze;

– porównaniu uzyskanych na podstawie obliczeń numerycznych wartości współczynników filtracji z wartościami teoretycznymi.

CHARAKTERYSTYKA OŚRODKA

Przykładowe obliczenia przeprowadzono na ośrodku gruntowym składającym się z pięciu jednorodnych i izotropowych warstw o stałej miąższości (fig. 3). Wartości miąższości poszczególnych warstw M_i oraz współczynników filtracji k_i przedstawiono w tabeli 1. Dla tak przyjętego układu warstw obliczono ze wzoru [9] teoretyczne wartości

współczynnika filtracji $k_{e(t)}$ oraz ze wzoru [15] wartości kąta γ między wektorami $\text{grad}H$ i \mathbf{v} dla różnych wartości kąta α między prędkością filtracji a kierunkiem osi głównej x . Na

Tabela 1

Podstawowe właściwości ośrodku o strukturze warstwowej
Basic properties of a layered medium

Nr warstwy	M_i [cm]	k_i	k_{\parallel}	k_{\perp}	$\lambda = \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}}$ [-]
1	21	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$2,06 \cdot 10^{-4}$	$1,98 \cdot 10^{-5}$	10,37
2	20	$1,0 \cdot 10^{-5}$			
3	19	$6,0 \cdot 10^{-6}$			
4	20	$8,0 \cdot 10^{-5}$			
5	31	$2,0 \cdot 10^{-4}$			

M_i – miąższość i -tej warstwy, k_i – współczynnik filtracji i -tej warstwy, k_{\parallel} – zastępczy współczynnik filtracji w kierunku równoległym do granicy warstw,

k_{\perp} – zastępczy współczynnik filtracji w kierunku prostopadłym do granicy warstw

λ – współczynnik anizotropii

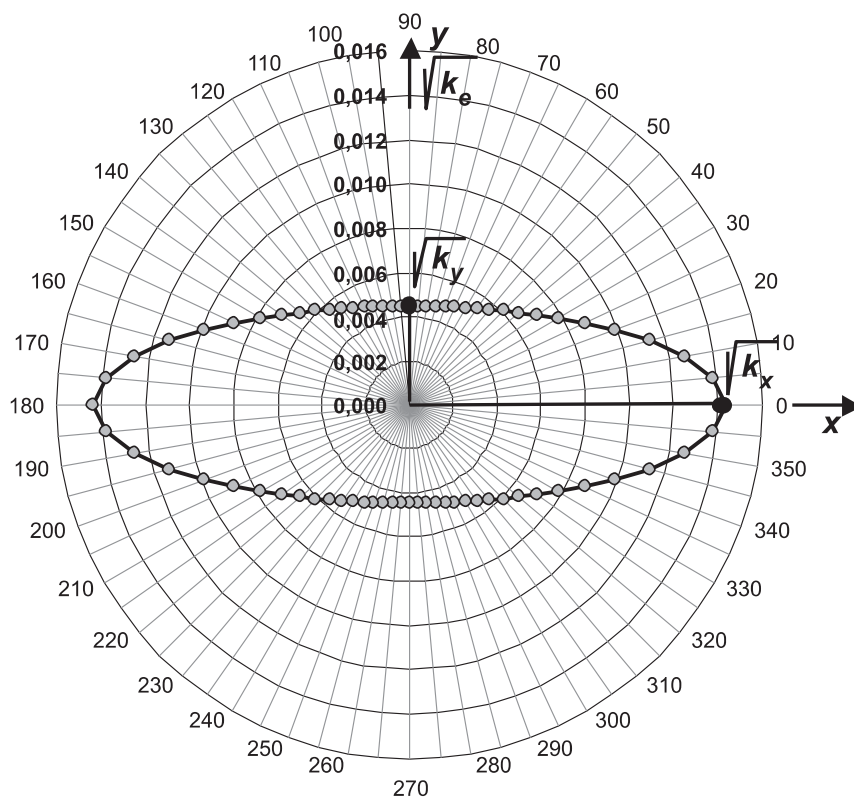


Fig. 4. Elipsa współczynnika filtracji
Hydraulic conductivity ellipse

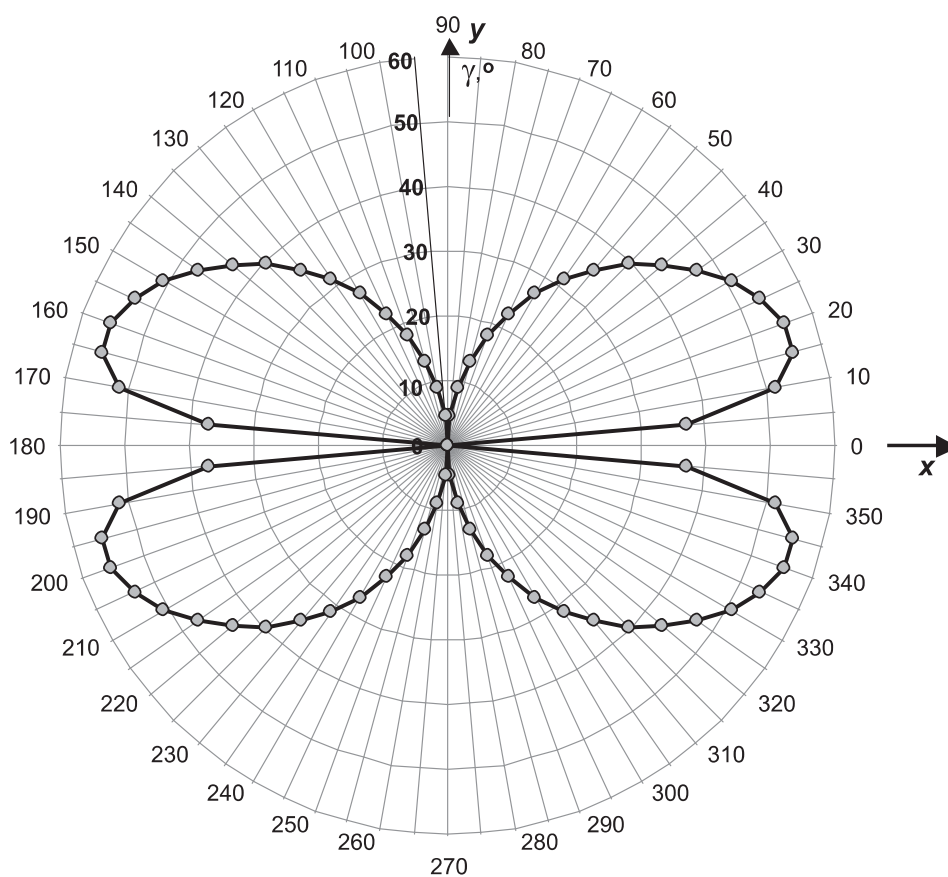


Fig. 5. Kąt między gradientem hydraulicznym a prędkością filtracji w zależności od kierunku filtracji
The angle between the hydraulic gradient and filtration velocity depending on filtration direction

podstawie uzyskanych wyników wykreślono elipsę współczynnika filtracji ($\sqrt{k_e}$) oraz wartości kątów γ w zależności od kierunku filtracji (fig. 4 i 5).

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE PRZEPŁYWU W PERMEAMETRZE

Zadanie przepływu w permeametrze rozwiązano na podstawie równania Laplace'a, zakładając ustalony przepływ cieczy nieściśliwej przez ośrodek nieodkształcalny. Na powierzchniach stanowiących granicę obszaru filtracji przyjęto warunki brzegowe zgodnie z figurą 3. Natomiast na granicy warstw o różnej przepuszczalności przyjęto $H_i = H_{i+1}$ oraz $v_{ni} = v_{ni+1}$, gdzie H_i, H_{i+1} oznaczają wysokości hydrauliczne, a v_{ni} i v_{ni+1} – składowe prędkości filtracji, normalne do granicy i -tej i $i+1$ warstwy. Cały obszar filtracji podzielono na 110×14 bloków. Obliczenia numeryczne wykonano metodą różnic skończonych w arkuszu kalkulacyjnym Excel, stosując iterację Gaussa-Seidla. Wyniki obliczeń dla różnych kątów α przedstawiono w tabeli 2. Zawiera ona teoretycznie i numerycznie wyznaczone wartości zastępczego współczynnika filtracji ($k_{e(t)}$ i $k_{e(num)}$), teoretyczne wartości kątów γ między $\text{grad}H$ i \mathbf{v} , błąd w numerycznym określeniu zastępczego współczynnika filtracji względem wartości teoretycznej

$$\frac{\Delta k}{k_{e(t)}} = \frac{k_{e(t)} - k_{e(num)}}{k_{e(t)}} \cdot 100\%, \text{ a także wartości błędów}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q_{sr}} = \frac{Q_w - Q_d}{0,5(Q_w + Q_d)} \cdot 100\% \text{ wynikających z numerycznego}$$

porównania wydatku wody dopływającej Q_d i wypływającej Q_w z badanej próbki. Błąd ten uznano jako reprezentatywny dla oszacowania dokładności wyników obliczeń numerycznych.

BŁĄD OZNACZENIA WSPÓŁCZYNNIKA FILTRACJI

Aby oszacować błąd przy oznaczaniu współczynnika filtracji ośrodka o strukturze warstwowej, założono, że badania przeprowadzono w permeametrze na ośrodku pokazanym na figurze 3. Badania wykonano dla dwóch kierunków przepływu względem osi głównej tensora przepuszczalności, odpowiadającym kątom α równym 45° i 80° . Określone na podstawie badań zastępcze współczynniki filtracji są zgodne z tabelą 2 i wynoszą odpowiednio $2,31 \cdot 10^{-05}$ oraz $2,01 \cdot 10^{-05}$ m/s.

PODSUMOWANIE

Przeprowadzone wyniki obliczeń wskazują na możliwość powstania istotnych błędów oznaczenia przepuszczalności ośrodków o strukturze warstwowej podczas badań w

Tabela 2

Wyniki numerycznych obliczeń kąta γ między gradientem hydraulicznym a prędkością filtracji i zastępczego współczynnika filtracji

Results of numerical calculations of angle γ between the hydraulic gradient and filtration velocity and the equivalent hydraulic conductivity

α	γ	$k_{e(t)}$	$k_{e(num)}$	$\frac{\Delta k}{k_{e(t)}}$	$\frac{\Delta Q}{Q_{sr}}$
	[°]	[m/s]		[%]	
0	0,00	$2,06 \cdot 10^{-04}$	$2,06 \cdot 10^{-04}$	0,00	0,00
45	39,49	$3,61 \cdot 10^{-05}$	$2,31 \cdot 10^{-05}$	36,15	-0,03
50	35,37	$3,16 \cdot 10^{-05}$	$2,15 \cdot 10^{-05}$	32,01	3,82
55	31,14	$2,82 \cdot 10^{-05}$	$2,13 \cdot 10^{-05}$	24,39	3,04
60	26,81	$2,56 \cdot 10^{-05}$	$2,11 \cdot 10^{-05}$	17,40	2,43
65	22,43	$2,36 \cdot 10^{-05}$	$2,09 \cdot 10^{-05}$	11,45	1,68
70	17,99	$2,22 \cdot 10^{-05}$	$2,07 \cdot 10^{-05}$	6,64	1,09
75	13,52	$2,11 \cdot 10^{-05}$	$2,04 \cdot 10^{-05}$	3,18	0,61
80	9,03	$2,04 \cdot 10^{-05}$	$2,01 \cdot 10^{-05}$	1,08	0,27
85	4,52	$2,00 \cdot 10^{-05}$	$1,99 \cdot 10^{-05}$	0,17	0,06
90	0,00	$1,98 \cdot 10^{-05}$	$1,98 \cdot 10^{-05}$	0,09	0,00

- α – kąt między kierunkiem prędkości filtracji a osią główną tensora współczynnika filtracji
- γ – kąt między gradientem hydraulicznym a prędkością filtracji
- $k_{e(t)}$ – teoretyczna wartość zastępczego współczynnika filtracji
- $k_{e(num)}$ – wartość numerycznie obliczonego zastępczego współczynnika filtracji dla warunków przepływu w permeametrze
- $\frac{\Delta k}{k_{e(t)}}$ – błąd w określeniu zastępczego współczynnika filtracji za pomocą permeametry
- $\frac{\Delta Q}{Q_{sr}}$ – błąd wydatku charakteryzujący dokładność obliczeń numerycznych

Obliczając następnie z wzoru [9] współczynniki filtracji w kierunku osi głównych tensora przepuszczalności otrzymuje się $k_{\parallel} = 2,75 \cdot 10^{-05}$ m/s i $k_{\perp} = 1,99 \cdot 10^{-05}$ m/s. Przy założeniu, że kąty α zostały określone precyzyjnie, obliczona wartość k_{\perp} różni się bardzo nieznacznie od rzeczywistej, która wynosi $1,98 \cdot 10^{-05}$ m/s. Natomiast k_{\parallel} różni się bardzo wyraźnie, bo aż 7,5-krotnie. Należy też podkreślić, że tak duża różnica wyników nie jest spowodowana małą dokładnością numerycznych obliczeń przepływu. Świadczy o tym bardzo nieznaczna różnica wydatków wody dopływającej i wypływającej z próbki, która nie przekracza 0,3% (tab. 2).

permeametrze. Dotyczy to badań, w których przepływ odbywa się w kierunku ukośnym do warstwowania. Pojawienie się dużych błędów oznaczeń jest związane z brakiem zacho-

wania w permeametrze odpowiednich kierunków $\text{grad}H$ i \mathbf{v} oraz właściwego kształtu geometrycznego próbki. Ich wielkość zależy od wartości współczynnika anizotropii λ i różnicy kątowej między $\text{grad}H$ i \mathbf{v} . W przeprowadzonych przykładowych rozważaniach na ośrodku o współczynniku anizotropii $\lambda = 10,37$ obliczona wartość współczynnika filtracji w kierunku prostopadłym do granicy warstw była bardzo zbliżona do oczekiwanej, natomiast w kierunku równoległym była zaniżona aż 7,5-krotnie.

Należy też wyraźnie stwierdzić, że poprawne wyniki oznaczeń współczynnika filtracji ośrodków anizotropowych

uzyskuje się na podstawie badań przepływu w permeametrach w kierunku osi głównych tensora współczynnika filtracji. W przypadku ośrodków o strukturze warstwowej powinny to być kierunki równoległe i prostopadłe do ułożenia warstw. Badania pod kątem ukośnym do warstwowania mogą prowadzić do bardzo dużych błędów oznaczeń i w związku z tym powinna być opracowana specjalna procedura interpretacji wyników badań. Powinna ona uwzględniać opisaną specyfikę badań w permeametrze.

LITERATURA

- BATU V., 1998 – Aquifer hydraulics: a comprehensive guide to hydrogeologic data analysis. John Wiley & Sons, New York.
- CHENG A., 2000 – Multilayered aquifer systems: fundamentals and applications. Marcel Dekker, New York, Basel.
- PAZDRO Z., 1982 – Hydrogeologia ogólna. Wyd. Geol., Warszawa.
- ROGOŹ M., 2007 – Dynamika wód podziemnych. Gł. Inst. Gór., Katowice.
- SNOW D.T., 1969 – Anisotropic permeability of fractured media. *Water Resour., Res.*, 5, 6: 1273–1289.
- WIECZYSTY A., 1982 – Hydrogeologia inżynierska. PWN, Warszawa.

SUMMARY

The article discusses theoretical basis for determining the hydraulic conductivity ellipse for anisotropic layered media. It contains formulae for equivalent hydraulic conductivity and the angle between hydraulic gradient ($\text{grad}H$) direction and filtration velocity (\mathbf{v}), depending on filtration direction. It also specifies problems encountered while determining hydraulic conductivity k in a permeameter in a direction oblique to layering. It has been proved that for oblique direction, it is impossible to replicate in the permeameter theoretical flow conditions in which the determined values correspond to the hydraulic conductivity ellipse. It is related to the geometric shape of a medium sample in the permeameter and the difference between $\text{grad}H$ and \mathbf{v} directions. In this view, the size of the arising differences between the hydraulic conductivity determined in the permeameter and the hydraulic conductivity determined for its ellipse has been analysed. With this aim, theoretical calculations of hydraulic conductivity for different directions of liquid flow through a layered medium were carried out, and then it was compared with the numerically determined hydraulic conductivity. Numerical calculations were conducted with the use of the finite difference method, while adopting boundary conditions corresponding to those occurring in the permeameter. In exemplary calculations conducted on a medium composed of five homogeneous and isotropic layers with the anisotropy

coefficient of ca. 10, the relative determination difference fell within the range from 0 to 36%. It has been observed that its magnitude depends on the value of the angle between hydraulic gradient and filtration velocity. For greater angles, the difference between the values of equivalent hydraulic conductivity is also greater.

The conducted investigations proved that the values of equivalent hydraulic conductivity determined numerically for permeameter flows in oblique direction were always lower than values calculated based on the hydraulic conductivity ellipse. This entails that the underrated values are obtained when conducting permeameter analyses for anisotropic media in a direction oblique to layering, and then deriving conductivity values in the direction of the principal axes of hydraulic conductivity tensor. The calculations, conducted for angles of 45° and 80° between flow direction and the surface constituting a layer boundary, produced a very similar value of hydraulic conductivity in a direction perpendicular to layering. At the same time, the value determined for the parallel direction was as much as 7.5 times lower. The ensuing conclusion is that permeameter analyses at an angle oblique to layering reduce the anisotropy effect and may lead to very large inaccuracies. In order to avoid them, an appropriate calculation procedure should be developed.