

## ZASTOSOWANIE PRZEKSZTAŁCENIA STAŁOOBJĘTOŚCIOWEGO DO OCENY ODNAWIALNOŚCI ZASOBÓW WÓD PODZIEMNYCH WSCHODNIEJ CZĘŚCI POJEZIERZA POMORSKIEGO

### APPLICATION OF THE CONSTANT VOLUME TRANSFORMATION TO THE ASSESSMENT OF THE GROUNDWATER RESOURCES RENEWABILITY IN THE EASTERN PART OF THE POMERANIAN LAKE DISTRICT

LECH ŚMIETAŃSKI<sup>1</sup>

**Abstrakt.** Artykuł przedstawia zastosowanie algorytmu przekształcenia stałoobjętościowego do obliczenia rozkładu średniej z wielolecia infiltracji efektywnej, generującej odpływ podziemny do rzek o znanej średniej z wielolecia wartości. U podstawy tego sposobu liczenia leży założenie równości pomiędzy tak rozumianą infiltracją a tym odpływem podziemnym dla danego obszaru bilansowego. W prezentowanym przykładzie dystrybucja infiltracji jest sterowana rozkładem litologii utworów powierzchniowych oraz średnim rocznym opadem, które mają w prezentowanej metodzie obliczeniowej sens funkcji wagowych. Przedstawiony wynik przykładowych obliczeń to rozkład infiltracji efektywnej we wschodniej części Pojezierza Pomorskiego. W granicach każdego z siedemnastu obszarów bilansowych w tym regionie całkowita wartość infiltracji efektywnej, o obliczonym rozkładzie, równa jest wartości oszacowanego uprzednio odpływu podziemnego do rzek.

**Słowa kluczowe:** odnawialność zasobów, infiltracja efektywna, odpływ podziemny, przekształcenie stałoobjętościowe, obszar bilansowy.

**Abstract.** The paper presents the constant volume transformation algorithm allowing to calculate the distribution of the long term mean groundwater recharge which generates the groundwater runoff with the known long term mean value. The algorithm is based on the assumption of the equality between this recharge and this groundwater runoff for the given budget area. In this case study the recharge is governed by the distribution of the surface lithology and long term mean precipitation both having the status of weight functions. The outcome of the calculations is the distribution of the recharge in the eastern part of the Pomeranian Lake District in Poland. Within the boundaries of each of the 17 budget areas the total value of the recharge is equal to the groundwater runoff value assessed prior to the calculations.

**Key words:** resources renewability, groundwater recharge, groundwater runoff, constant volume transformation, budget area.

## WSTĘP

Ocena odnawialności zasobów wód podziemnych jest najważniejszym elementem w procesie ich określania w skali regionalnej przy użyciu modelowania matematycznego i zawsze powinna poprzedzać budowę modelu matematycznego przepływu wód podziemnych w danym systemie ich krążenia.

Autor utożsamia odnawialność zasobów wód podziemnych ze średnią z wielolecia infiltracją efektywną generującą równy jej co do wartości średni z wielolecia odpływ podziemny do rzek. Tym samym średni z wielolecia odpływ podziemny do rzek, nazywany w dalszej części artykułu

<sup>1</sup> Państwowy Instytut Geologiczny – Państwowy Instytut Badawczy, ul. Rakowiecka 4, 00-975 Warszawa; e-mail: lech.smietanski@pgi.gov.pl

odpływem podziemnym, jest wprost miarą odnawialności zasobów wód podziemnych.

Obszary o znanym odpływie podziemnym to zlewnie rzek zamknięte posterunkiem wodowskazowym. Z zarejestrowanego w okresie wieloletnim na danym posterunku całego spektrum przepływów rzecznych wyodrębniony średni niski przepływ (SNQ) jest przyjmowany w literaturze jako równy odpływowi podziemnemu (Jokiel, 1994). Zlewnie cząstkowe dużych rzek, zlewnie rzek średniej wielkości oraz grupy zlewni rzek małych, o znanym odpływie podziemnym, zostały określone przez Regionalne Zarządy Gospodarki Wodnej mianem obszarów bilansowych. Ocenę odnawialności zasobów wód podziemnych autor przedstawia w granicach obszarów bilansowych wschodniej części Pojezierza Pomorskiego.

### DEFINICJA PRZEKSZTAŁCENIA STAŁOOBJĘTOŚCIOWEGO

Niech zbiór  $\Omega$  należący do  $R^2$  będzie dziedziną nieujemnej funkcji  $M(x, y)$ , dla  $(x, y) \in \Omega$ , i niech  $M(x, y)$  należy do klasy funkcji całkownych na całym  $\Omega$ . Symbol  $R^2$  oznacza dwuwymiarową przestrzeń liczb rzeczywistych, np. płaszczyznę  $XY$  opisaną równaniem  $z=0$ . Obrazem geometrycznym funkcji  $M(x, y)$  jest pewna trójwymiarowa powierzchnia w kartezjańskim układzie współrzędnych  $XYZ$ . Objętość bryły ograniczonej od dołu przez  $\Omega$  a od góry przez powierzchnię opisaną równaniem  $z = M(x, y)$  niech wynosi  $V$ . Mamy więc:  $V = \int_{\Omega} M(x, y)$

Niech nowa powierzchnia  $z = H(x, y)$ , dla  $(x, y) \in \Omega$ , powstanie z transformacji powierzchni  $z = M(x, y)$  w wyniku działania pewnego przekształcenia  $T$ , czyli:

[1]

$$H(x, y) = T(x, y) \cdot M(x, y)$$

Objętość  $V$  ma być niezmiennikiem tego przekształcenia, tzn. objętość pod „starą powierzchnią”  $z = M(x, y)$  ma być równa objętości pod „nową powierzchnią”  $z = H(x, y)$ . W związku z tym spełnione ma być równanie:

[2]

$$\int_{\Omega} M(x, y) = \int_{\Omega} H(x, y)$$

Niech  $F(x, y)$  będzie również pewną funkcją nieujemną, określoną i całkowną na całym  $\Omega$ , a więc należącą do tej samej klasy co  $M(x, y)$ . Niech  $F(x, y)$  pełni rolę funkcji sterującej przekształceniem  $T$ . Funkcja  $F(x, y)$  jest ponadto iloczynem  $N$  funkcji  $W_i(x, y)$  należących do tej samej klasy:

W procesie realizacji hydrogeologicznych badań modelowych, w skali regionalnej, zasadnicze znaczenie ma prawidłowe zdefiniowanie warunków brzegowych modelu. Dla modelu zasobowego najważniejszym warunkiem brzegowym jest niewątpliwie infiltracja efektywna, rozumiana w sensie wyżej przedstawionym, określona zarówno co do całkowitej swej wartości, jak i rozkładu przestrzennego. Dla danego obszaru bilansowego całkowita wartość tej infiltracji jest przyjęta jako równa wartości odpływu podziemnego. Do obliczenia rozkładu przestrzennego tej infiltracji autor stosuje opracowany przez siebie algorytm przekształcenia stałoobjętościowego (Śmietański, 2010).

[3]

$$F(x, y) = \prod_{i=1}^N W_i(x, y)$$

Funkcje  $W_i(x, y)$  nazwane zostały funkcjami wagowymi przekształcenia  $T$ .

Postulowana formuła przekształcenia stałoobjętościowego to:

[4]

$$T(x, y) = \frac{F(x, y) \cdot \int_{\Omega} M(x, y)}{\int_{\Omega} [F(x, y) \cdot M(x, y)]}$$

Podstawiając równanie [4] do [1] otrzymujemy:

[5]

$$H(x, y) = \frac{F(x, y) \cdot \int_{\Omega} M(x, y)}{\int_{\Omega} [F(x, y) \cdot M(x, y)]} \cdot M(x, y)$$

Całkując po zbiorze  $\Omega$  obie strony równania [5], otrzymujemy, równanie [2], czyli objętość  $V$  jest niezmiennikiem przekształcenia  $T$ . Uwzględniając [3], otrzymujemy ogólną postać przekształcenia stałoobjętościowego [6]:

[6]

$$H(x, y) = \frac{\left[ \prod_{i=1}^N W_i(x, y) \right] \cdot \int_{\Omega} M(x, y)}{\int_{\Omega} \left[ \prod_{i=1}^N W_i(x, y) \right] \cdot M(x, y)} \cdot M(x, y)$$

## ROZKŁAD INFILTRACJI EFEKTYWNEJ W ŚWIETLE PRZEKSZTAŁCENIA STAŁOBJĘTOŚCIOWEGO

Na przykładzie wschodniej części Pojezierza Pomorskiego (fig. 1) o powierzchni 23 752 km<sup>2</sup>, autor przedstawia wynik obliczeń rozkładu infiltracji efektywnej przy użyciu algorytmu przekształcenia stałobjętościowego. Znajduje się tu 17 obszarów bilansowych, z których 11 praktycznie całkowicie mieści się w granicach analizowanego regionu. Powierzchnie oraz wartości wskaźnika odpływu podziemnego dla obszarów bilansowych przedstawia tabela 1.

Dla każdego z tych obszarów znana jest wartość odpływu podziemnego (tab. 1). W przypadku, gdy jedynie fragment obszaru bilansowego znajdował się w granicach

analizowanego regionu, odpływ podziemny z tego fragmentu oszacowano proporcjonalnie do jego udziału w całkowitej powierzchni obszaru bilansowego.

Do obliczenia rozkładu infiltracji efektywnej, w granicach danego obszaru bilansowego w analizowanym regionie, zdefiniowane zostały dwie funkcje wagowe  $W_1(x, y)$  i  $W_2(x, y)$ , czyli  $N = 2$ :

- funkcja  $W_1(x, y)$  reprezentuje litologię utworów powierzchniowych LIT, na podstawie Mapy Geologicznej Polski 1:200 000, z wartościami wagowymi

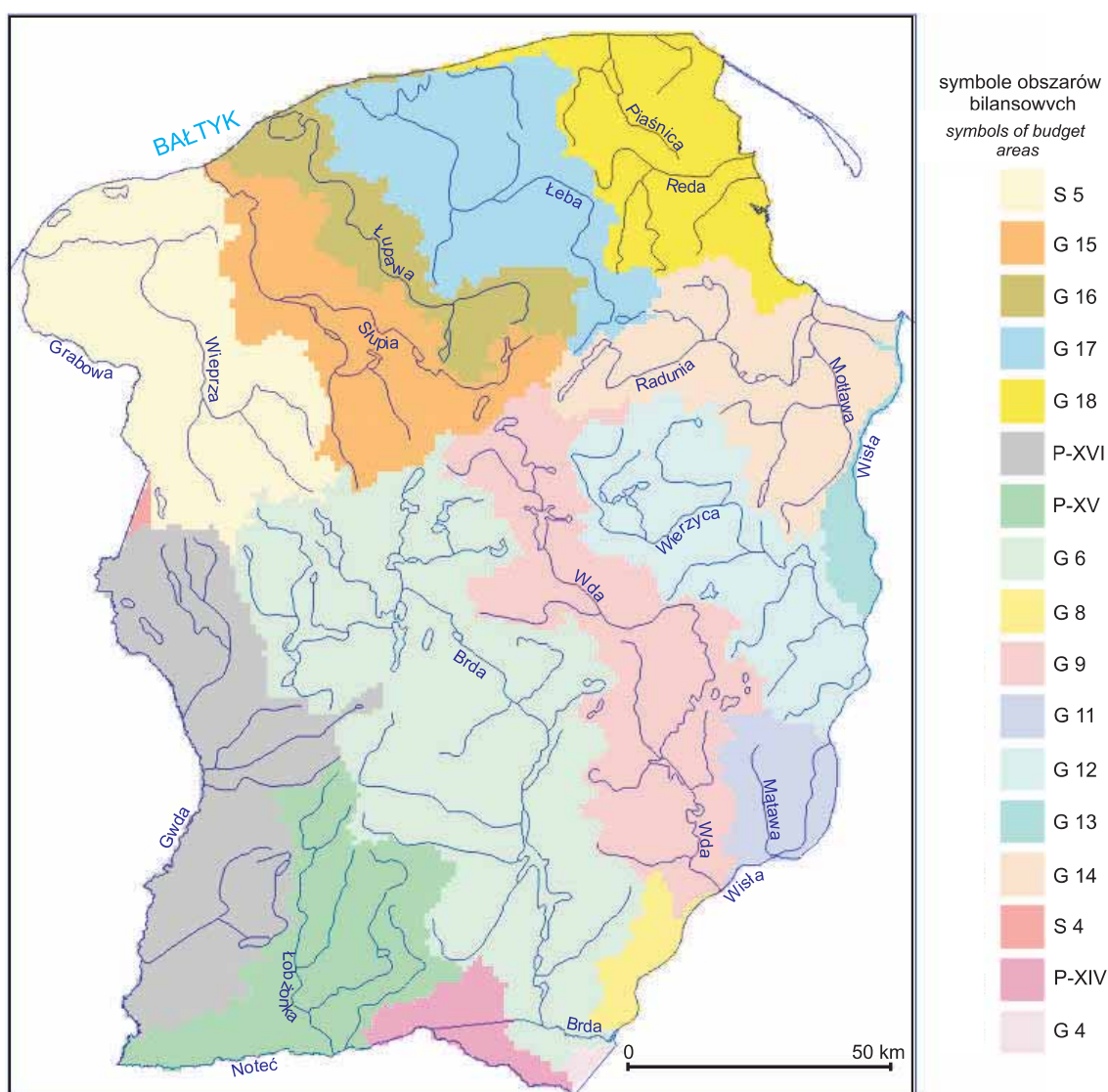


Fig. 1. Położenie obszarów bilansowych w analizowanym regionie (Herbich i in., 2003)

Location of the budget areas in the study region (Herbich *et al.*, 2003)

**Tabela 1**  
**Powierzchnie i wartości wskaźnika odpływu**  
**podziemnego  $q_{gr}$  dla obszarów bilansowych**  
**w granicach analizowanego regionu**  
**(Herbich i in., 2003)**

Areas and groundwater runoff index values  $q_{gr}$  for the budget areas in the study region (Herbich *et al.*, 2003)

Symbol obszaru bilansowego	Powierzchnia [km <sup>2</sup> ]	Wartość wskaźnika odpływu podziemnego $q_{gr}$ [l/s · km <sup>2</sup> ]
S 5	2340,1	3,26
G 15	1642,6	3,38
G 16	978,3	3,34
G 17	1801,2	3,30
G 18	1531,0	2,72
P-XVI	2210,1	3,31
P-XV	1523,7	1,95
G 6	4627,2	2,95
G 8	192,7	1,58
G 9	2325,2	3,78
G 11	573,9	2,81
G 12	1602,9	2,61
G 13	252,4	0,93
G 14	1745,4	2,16
S 4	26,7	2,32
P-XIV	339,0	1,39
G 4	40,2	1,74

przypisanymi poszczególnym wydzieleniom (tab. 2; fig. 2),

– funkcja  $W_2(x, y)$  reprezentuje rozkład opadów średnich rocznych  $P$  (fig. 3).

Definiując dla danego obszaru bilansowego funkcję  $M(x, y) = q_{gr}$ , gdzie  $q_{gr}$  to wskaźnik odpływu podziemnego z tego obszaru, i podstawiając  $W_1(x, y) = LIT(x, y)$  i  $W_2(x, y) = P(x, y)$  oraz nadając funkcji  $H(x, y)$  fizyczny sens infiltracji efektywnej  $I_e$ , czyli  $H(x, y) = I_e(x, y)$ , formułę [6] po odpowiednich przekształceniach można zapisać w postaci:

[7]

$$I_e(x, y) = \frac{LIT(x, y) \cdot P(x, y)}{\langle LIT(x, y) \cdot P(x, y) \rangle} q_{gr}$$

Wyrażenie  $\langle LIT(x, y) \cdot P(x, y) \rangle$  to średnia wartość iloczynu funkcji  $LIT(x, y)$  i  $P(x, y)$  w granicach danego obszaru bilansowego.

Wydzielenia o numerach 5 i 9 są takie same w sensie litologicznym, różnią się jednak lokalizacją osadów, dlatego zostały przypisane im różne wartości wagowe. Tak samo jest w przypadku wydzieleni o numerach 7 i 8.

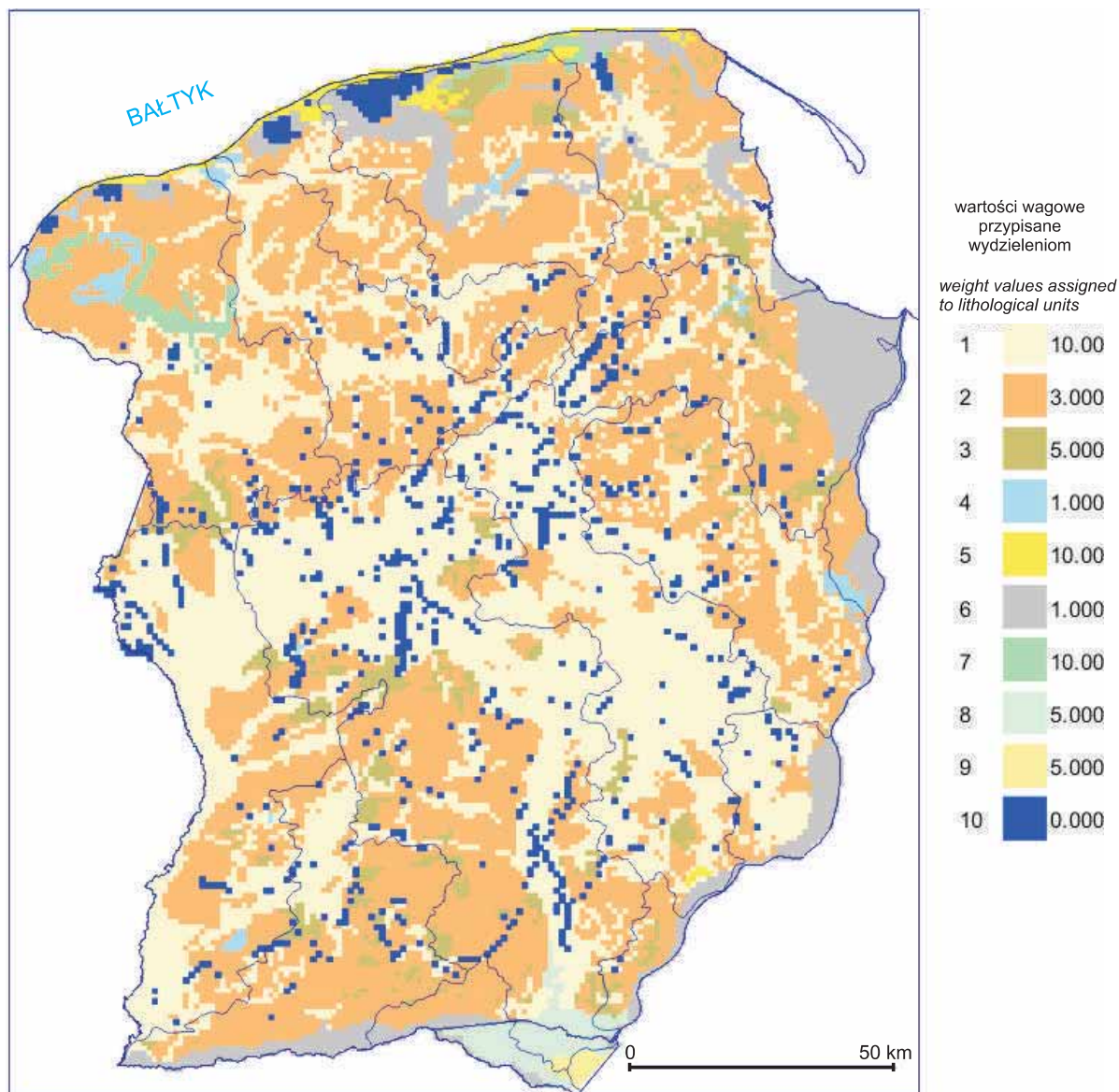
W równaniu [7] wartość funkcji  $LIT(x, y)$ , przypisaną danemu wydzieleniu litologicznemu, należy rozumieć jako względną zdolność infiltracyjną tego wydzielenia w stosunku do wydzieleni pozostałych. I tak w przedstawionym przykładzie (tab. 2) wydzieleniu o nazwie „iły, mułki i piaski zastoiskowe” – wartość wagową  $LIT = 1$ , natomiast wydzieleniu „głina zwałowa” przypisano wartość wagową  $LIT = 3$ . Oznacza to, że infiltracja dla „gliny zwałowej” jest przyjęta jako trzy razy większa niż dla „iłó, mułków i piasków zastoiskowych” przy tej samej wysokości opadu.

**Tabela 2**

**Wydzielenia litologiczne przedstawione na figurze 2**

Lithological units shown in figure 2

Nr wydzielenia	Opis wydzielenia	Wartość wagowa przypisana wydzieleniu
1	piaski i żwiry wodnolodowcowe	10
2	głina zwałowa	3
3	piaski i żwiry akumulacji lodowcowej na glinie zwałowej	5
4	iły, mułki i piaski zastoiskowe	1
5	piaski eoliczne na wysoczyznach i na nizinie nadmorskiej	10
6	mady, torfy, namuły torfiaste i piaski w dolinach rzek	1
7	plejstocenijskie piaski i żwiry rzeczne na wysoczyznach i na nizinie nadmorskiej	10
8	plejstocenijskie piaski i żwiry rzeczne w dolinach rzek	5
9	piaski eoliczne w dolinach rzecznych	5



**Fig. 2. Graficzna postać funkcji wagowej  $LIT(x, y)$**

Wydzielenia litologiczne na podstawie Mapy Geologicznej Polski 1:200 000, uproszczone. Wydzielenie nr 10 to jeziora. W tle granice obszarów bilansowych

Graphic image of the weight function  $LIT(x, y)$

Simplified surface lithology after the Geological map of Poland 1:200 000. Dark blue areas indicate lakes. The budget areas boundaries in the background

W równaniu [7] wysokość średniego rocznego opadu  $P(x, y)$  ma także sens wartości wagowej. Jeśli więc w jednym punkcie danego obszaru bilansowego wysokość ta wynosi np. 530 mm, a w innym punkcie tego obszaru 600 mm, to dla takich samych wydzieleni litologicznych w obu tych punktach proporcja pomiędzy infiltracją efektywną w punkcie pierwszym a infiltracją efektywną w punkcie drugim wynosi 530 : 600.

Licznie występujące w analizowanym regionie jeziora zostały potraktowane jako wydzielenie o wartości wagowej

$LIT = 0$ , tym samym obliczona wartość infiltracji efektywnej w granicach jezior wynosi zero.

W celu obliczenia rozkładu infiltracji efektywnej  $I_e(x, y)$  we wschodniej części Pojezierza Pomorskiego obszar ten zdyskretyzowano siatką kwadratową o kroku 1 km, składającą się z 206 wierszy i 172 kolumn, co umożliwiło utworzenie tablic wartości funkcji wagowych  $LIT(x, y)$  i  $P(x, y)$ . Opracowany przez autora program wygenerował dla każdego obszaru bilansowego rozkład infiltracji efektywnej wg formuły [7].

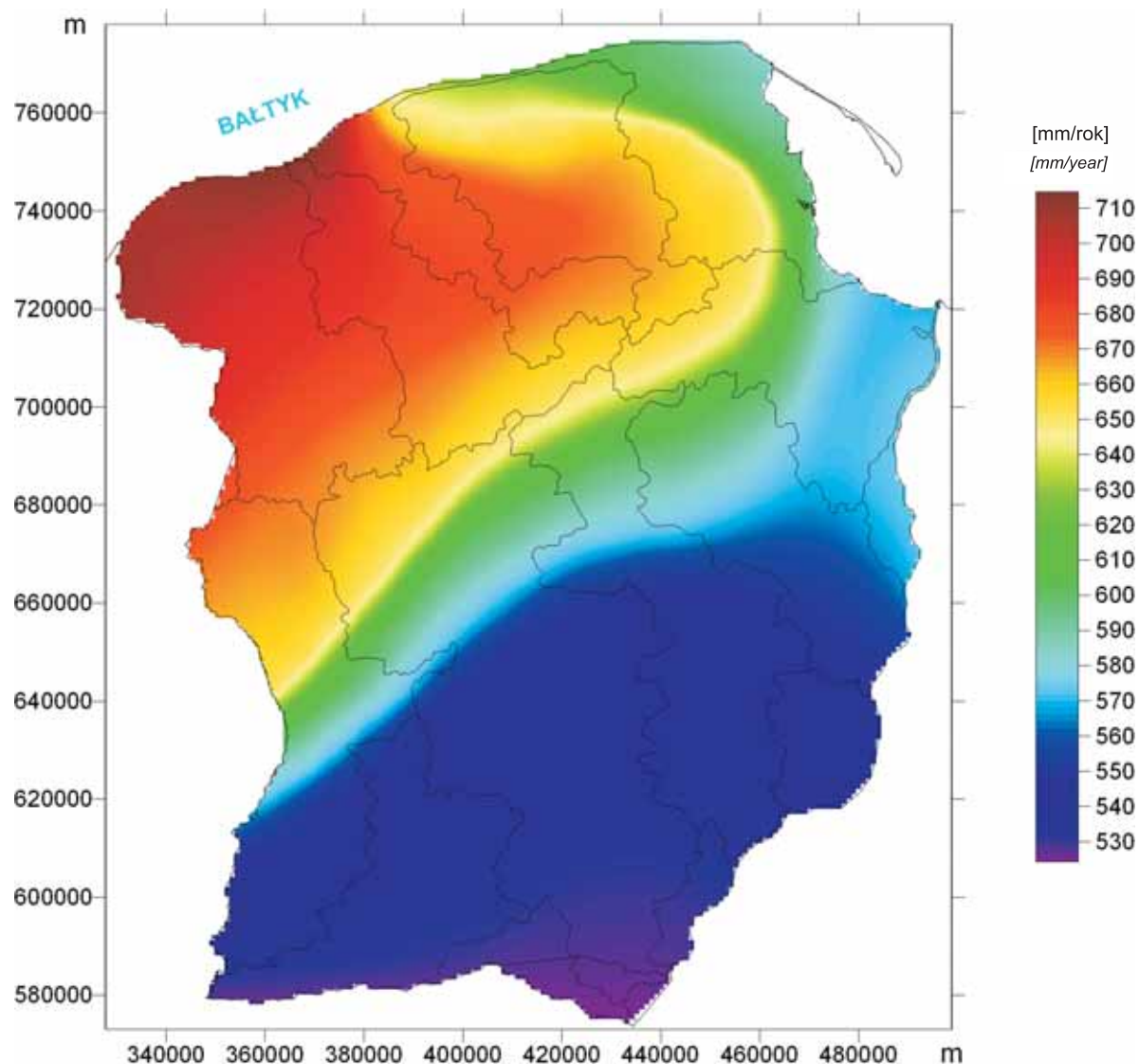


Fig. 3. Graficzna postać funkcji wagowej  $P(x, y)$  reprezentującej średnie roczne opady w analizowanym regionie dla okresu 1971–2000 (Lorenc, 2005)

W tle granice obszarów bilansowych

Graphic image of the weight function  $P(x, y)$  representing the annual mean precipitation in the study region for the period of 1971–2000 (Lorenc, 2005)

Budget areas boundaries in the background

Wynik obliczeń przedstawia figura 4. Obliczone wartości infiltracji efektywnej, generującej odpływ podziemny do rzek, to kilkanaście mm/rok w dolinach rzek, takich jak Wisła i Noteć czy też w pradolinie Redy–Łeby, 40–60 mm/rok na obszarach pokrytych glinami zwałowymi i 130–200 mm/rok tam gdzie na powierzchni terenu leżą osady piaszczyste. Wyraźnie widoczny jest bezpośredni

wpływ rozkładu średnich rocznych opadów na rozkład wartości infiltracji efektywnej.

Obliczona średnia wartość tej infiltracji, we wschodniej części Pojezierza Pomorskiego wynosi 90 mm/rok, co można przyjąć za wskaźnik odnawialności zasobów wód podziemnych na tym obszarze.

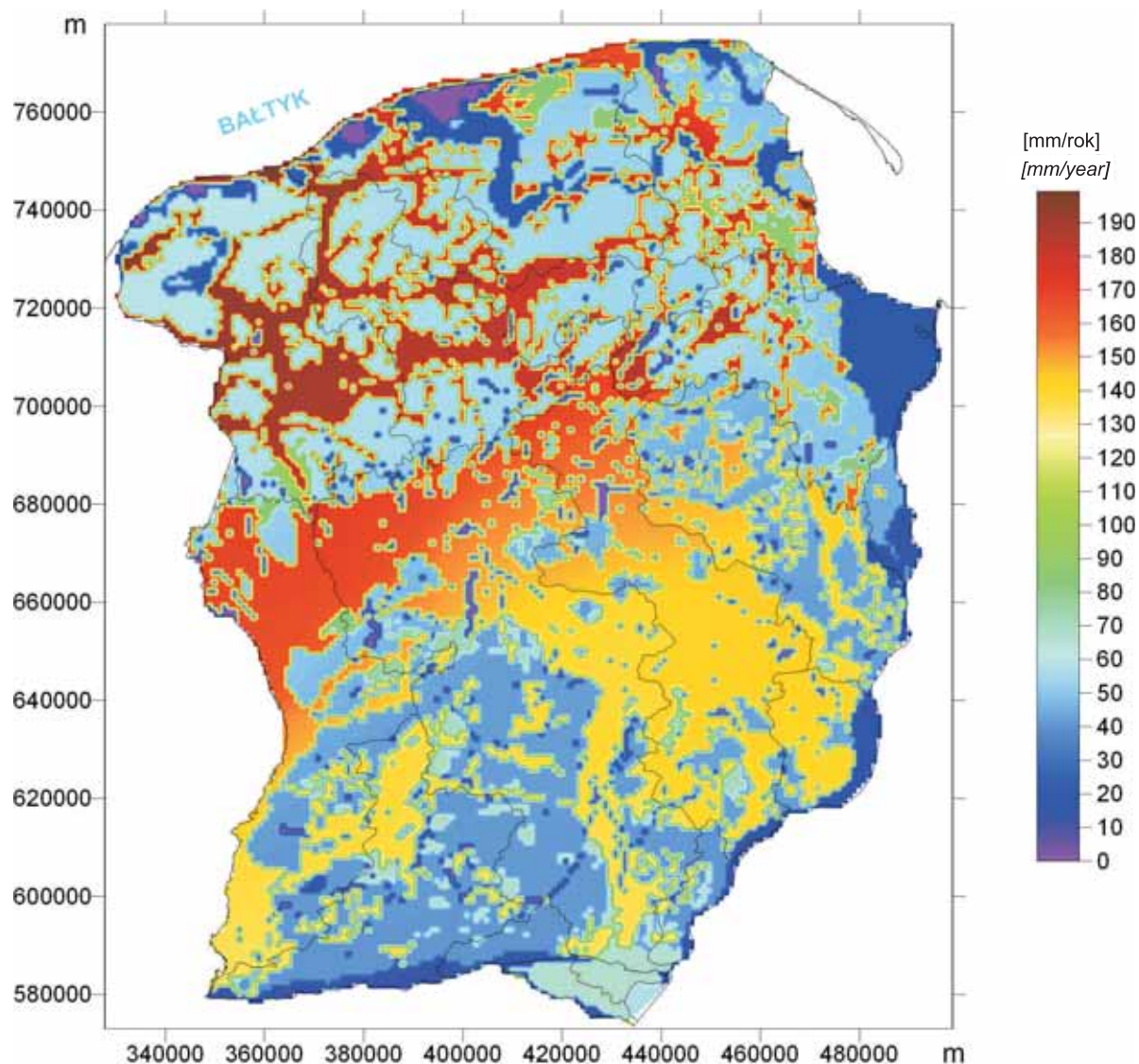


Fig. 4. Obliczony rozkład wartości infiltracji efektywnej  $I_e$  w analizowanym regionie

W tle granice obszarów bilansowych

Calculated distribution of the groundwater recharge  $I_e$  in the study region

Budget areas boundaries in the background

## WNIOSKI

Przedstawiona metoda oceny odnawialności zasobów wód podziemnych wiąże bezpośrednio, w procesie obliczeniowym, odnawialność z odpływem podziemnym do rzek. Odnawialność zasobów wód podziemnych została ułożona w artykule ze średnią z wieloletnią infiltracją efektywną generującą ten odpływ.

Metoda przekształcenia stałoobjętościowego oparta jest na założeniu równości pomiędzy wartością tej infiltracji a wartością średniego z wieloletnia odpływu podziemnego do rzek. Zastosowanie omawianej metody jest więc ograni-

czony do obszarów o znanej wartości tego odpływu jakimi są obszary bilansowe.

Obliczenie tą metodą rozkładu infiltracji efektywnej wymaga zdefiniowania tzw. funkcji wagowych sterujących tym rozkładem. W przedstawionym przykładzie takimi funkcjami są w sposób naturalny: litologia utworów powierzchniowych z przypisanymi poszczególnym wydzieleniom wartościom wagowymi oraz rozkład średniego z wieloletnia opadu rocznego.

Metoda przekształcenia stałoobjętościowego nie narzuca ograniczeń na liczbę funkcji wagowych zdefiniowanych do oceny rozkładu infiltracji efektywnej. Można dodatkowo, w zależności od potrzeb, określić jako funkcję wagową, np. sposób zagospodarowania terenu czy mapę spadków tego terenu.

Obliczony przedstawionym algorytmem rozkład wartości infiltracji efektywnej może być wykorzystany następnie jako warunek brzegowy dla modelu przepływu wód podziemnych w analizowanym regionie.

## LITERATURA

HERBICH P., DĄBROWKI S., NOWAKOWSKI CZ., 2003 — Ustalenie zasobów perspektywicznych wód podziemnych w obszarach działalności Regionalnych Zarządów Gospodarki Wodnej. Państw. Inst. Geol., Warszawa.

JOKIEL P., 1994 — Zasoby, odnawialność i odpływ wód podziemnych strefy aktywnej wymiany w Polsce. *Acta Geogr. Lodz.*, **66–67**.

LORENC H. (red.), 2005 — Atlas klimatu Polski. Wyd. IMiGW.

ŚMIETAŃSKI L., 2010 — The quantitative evaluation of the catchment available groundwater resources – the case study. *Biul. Państw. Inst. Geol.*, **441**: 183–192.

## SUMMARY

The assessment of the groundwater resources renewability is crucial for the successful use of the mathematical modelling in these resources evaluation and should always precede the construction of the mathematical model of the groundwater flow in a given hydrogeological system.

The groundwater resources renewability is identified by the author with the groundwater recharge generating the underground runoff to the rivers. For the budget areas the long term annual mean recharge equals the long term annual mean underground runoff. Having for a given budget area the estimated total recharge on the base of the underground runoff the distribution of this recharge is calculated using the author's constant volume transformation (CVT) algorithm.

From the mathematical point of view the CVT modifies the shape of a given surface saving the volume contained be-

tween the surface and the reference level. So called weight functions control the numerical process of this modification.

As an example the CVT algorithm was applied to calculate the distribution of the groundwater recharge in the eastern part of the Pomeranian Lake District. In this case two weight functions were defined: the distribution of the surface lithology with the weight values assigned to each lithological unit and the distribution of the long term annual mean precipitation. The outcome of these calculations showed that in the river valleys this recharge values are low and do not exceed 20 mm/year while in the uplands are within the range of 40–60 mm/year for till covered areas and 130–200 mm/year for sand outwash covered areas. The average recharge value for the whole analysed area is 90 mm/year.